

Modelo matemático del ejercicio de sentadilla

Análisis biomecánico en peso libre y guiado



Eric Castillo Sanguino



PALMITO BOOKS

**Modelo matemático del ejercicio de sentadilla.
Análisis biomecánico en peso libre y guiado**

Eric Castillo Sanguino

Palmito Books

Título: Modelo matemático del ejercicio de sentadilla. Análisis biomecánico en peso libre y guiado

© Eric Castillo Sanguino, 2025

Reservados todos los derechos

De acuerdo con lo dispuesto en el art. 270 del Código Penal, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reproduzcan o plagien, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización.

Palmito Books®

Publicado en formato CD-ROM

1ª edición: diciembre 2025

ISBN: 979-13-88064-29-6

Depósito Legal: D.L. MU 2051-2025

DOI: 10.56533/ODGX5087

URL: <https://doi.org/10.56533/ODGX5087>



Agradecimientos

Con este proyecto concluye mi grado en la Universidad de Almería en Ingeniería Mecánica Industrial. A la primera persona que quiero dedicar mi agradecimiento es a mi madre, por respaldarme en las situaciones más difíciles y confiar en mí en todo momento. Gracias mamá. En segundo lugar, pero no menos importante, agradecer a mi padre, por todo el esfuerzo y dedicación que ha hecho por mí a lo largo de estos años, inculcarme los valores de trabajo y sacrificio, así como hacer todo el camino un poco más fácil.

Además, también quiero agradecer a todos mis compañeros, amigos y gente que forma parte de mi vida día a día, que han estado apoyándome a lo largo de este tiempo. Algunos siguen a mi lado y otros han tenido que tomar su camino para luchar por su futuro, pero de todos he sacado algo bueno y he aprendido de cada uno de ellos.

Por último, agradecer a Javi, mi tutor en este trabajo, por orientarme y guiarme desde el principio del proyecto, así como a Aarón, mi segundo tutor que me ha ayudado y me ha ofrecido su atención en todo momento.

Resumen

En el mundo del fitness, la sentadilla es un ejercicio básico y, por consiguiente, uno de los más practicados. Existen muchas variantes de la sentadilla, pero las dos más habituales que se realizan en gimnasios son la sentadilla libre y la guiada en máquina Smith. En este estudio realizado como Trabajo de Fin de Grado, se ha evaluado una comparativa biomecánica entre las dos variantes de sentadilla. Para ello, se ha definido un modelo matemático que describe el ejercicio de la sentadilla, donde posteriormente ha sido utilizado para resolver el problema de posición, cinemático y dinámico de cada ejercicio de forma independiente. En la modelización del ejercicio se ha trabajado desde un punto de vista mecánico, estudiando el cuerpo como un mecanismo de tres eslabones articulados. Los estudios han sido realizados a partir de los registros de posición, velocidad, aceleración y fuerzas de reacción medidas en una plataforma de fuerza. En los resultados se ha obtenido y analizado la cinemática completa y las fuerzas internas en las articulaciones, que, posteriormente, se ha realizado una comparativa entre las dos variantes del ejercicio de sentadilla estudiadas.

Palabras clave: análisis biomecánico, sentadilla libre, máquina Smith.

Abstract

In the world of fitness, the squat is a basic exercise and, consequently, one of the most widely practised. There are many variations of the squat, but the two most common ones performed in gyms are the free squat and the guided squat on a Smith machine. In this study, carried out as a Final Degree Project, a biomechanical comparison between the two squat variants has been evaluated. To do this, a mathematical model was defined to describe the back squat exercise, which was then used to solve the positional, kinematic and dynamic problem of each exercise independently. In the modelling of the exercise, we have worked from the mechanical point of view, studying the body as a mechanism of three articulated links. The studies were carried out on the basis of position, velocity, acceleration and reaction forces measured on a force platform. In the results, the complete kinematics and the internal forces in the joints were obtained, which were analysed and a comparison was made between the two variants of the squat exercise studied.

Keywords: biomechanical analysis, free squat, Smith machine.

Índice general

MEMORIA

1. INTRODUCCIÓN	23
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	25
3. MODELADO DEL EJERCICIO DE LA SENTADILLA	45
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	91
5. CONCLUSIONES	125

ANEXOS

ANEJO I. FASES DE REALIZACIÓN Y CRONOGRAMA	133
ANEJO II. COMPETENCIAS	135

Índice de tablas

Tabla 1. Número y tipo de eslabones del modelo guiado	46
Tabla 2. Pares cinemáticos del modelo guiado	47
Tabla 3. Número y tipo de eslabones del modelo libre	48
Tabla 4. Pares cinemáticos del modelo libre	48
Tabla 5. Datos antropométricos de los segmentos del cuerpo [16]	53
Tabla 6. Longitudes antropométricas de cada segmento	54
Tabla 7. Distancias que definen el modelo de la sentadilla en el problema de posición	55
Tabla 8. Tabla de los parámetros antropométricos de cada segmento	56
Tabla 9. Ensayos realizados en las dos modalidades de la sentadilla. (PC: peso corporal, *: representa una aproximación al porcentaje indicado de peso corporal, ya que se trataba de discos calibrados)	84
Tabla 10. Comparación de pares normalizados en el modelo libre y guiado	116
Tabla 11. Tabla de momentos máximos de las articulaciones planteados por Paul A. Swinton et al. [20]	118
Tabla 12. Comparativa de los valores de par obtenidos en el modelo de la sentadilla libre en el punto 4.1.3 con los resultados de par obtenidos en el estudio de Paul A. Swinton et al. [20] para el 30%, 50% y 70% de 1 RM	119
Tabla 13. Resultados del modelo de la Universidad de Primorskav y el modelo planteado para el estudio de la sentadilla libre	120
Tabla 14. Comparativa de pares del ensayo de Biscarini et al. [22] con el modelo 'Wall Squat' frente los resultados de par del modelo guiado	122
Tabla 15. Tabla comparativa entre los resultados de par obtenidos en el ensayo guiado frente los datos aproximados de par en el ensayo de Biscarini et al. [10]	123
Tabla 16. Cronograma del estudio	133

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Flexión profunda de rodillas [1]	26
Ilustración 2. Método ‘ <i>Steinborn</i> ’ [1].....	26
Ilustración 3. Jack LaLanne junto a una máquina Smith [3].....	27
Ilustración 4. Máquinas Smith. Izquierda: Titanium Strength Smith Machine 160SC. Derecha: Titanium Strength RM10 Evolution Deluxe [4].....	28
Ilustración 5. Rack de sentadillas [4]	28
Ilustración 6. Sentadilla clásica sin carga [6].....	29
Ilustración 7. Realización de la sentadilla búlgara [6].....	29
Ilustración 8. Sentadilla clásica con barra [6]	29
Ilustración 9. Sentadilla guiada en la máquina Smith [6].....	30
Ilustración 10. Izquierda: posición de la pelvis en la sentadilla libre. Derecha: posición de la pelvis en la sentadilla guiada [7].....	30
Ilustración 11. Sentadilla sumo [6]	30
Ilustración 12. Vértebra C7 [9].....	32
Ilustración 13. Músculo trapecio [9].....	32
Ilustración 14. Izquierda: Posición excéntrica de inicio del movimiento; Derecha: Posición isométrica, en el siguiente movimiento ascendente se inicia la fase concéntrica	33
Ilustración 15. Modelo planteado por Biscarini et al. [10]	34
Ilustración 16. Representación de cadena de mecanismos [13]	37
Ilustración 17. Modelo del ejercicio de la sentadilla guiada.....	40
Ilustración 18. Representación de los movimientos de translación y rotación de un punto sobre un sólido rígido [14].....	41
Ilustración 19. Representación gráfica del CoP	44
Ilustración 20. Izquierda: Modelo guiado. Derecha: Modelo libre.....	45
Ilustración 21. Representación de los pares cinemáticos en el modelo guiado.....	46
Ilustración 22. Representación de los pares cinemáticos para el modelo libre	47
Ilustración 23. Modelo de eslabones que definen el cuerpo en la sentadilla	49
Ilustración 24. Proporciones de los segmentos del cuerpo en hombres [16]	51
Ilustración 25. Localización del centro de gravedad de los segmentos del cuerpo [16].....	52
Ilustración 26. Esquema de distancias y ángulos del modelo.....	54
Ilustración 27. Izquierda: eslabón Superior. Centro: eslabón medio. Derecha: eslabón inferior. Las distancias definen los eslabones desde la articulación (punto negro) hasta el centro de gravedad	56

Ilustración 28. Izquierda: Posición excéntrica de inicio; Derecha: Posición isométrica	58
Ilustración 29. Ángulos de las principales articulaciones.....	58
Ilustración 30. Triangulo resultante de la unión del torso y el muslo	59
Ilustración 31. Triangulo resultante de la unión de la cadera y el tobillo.....	60
Ilustración 32. Triangulo resultante de una vertical desde la cadera hasta la altura del cuello. 61	
Ilustración 33. Triangulo resultante de una vertical desde la rodilla hasta la altura del tobillo. 61	
Ilustración 34. Representación del modelo con el origen del sistema de referencia.....	63
Ilustración 35. Vectores y centros de gravedad de los segmentos que definen el cuerpo	65
Ilustración 36. Eslabón de la pierna.....	66
Ilustración 37. Eslabón del muslo	67
Ilustración 38. Eslabón del torso	69
Ilustración 39. Modelo del sistema guiado.....	72
Ilustración 40. Análisis de equilibrio estático en la pierna	73
Ilustración 41. Análisis de equilibrio estático en el muslo	74
Ilustración 42. Análisis de equilibrio estático en el torso	75
Ilustración 43. Análisis de equilibrio estático en la barra para modelo guiado.....	76
Ilustración 44. Modelo del sistema libre	78
Ilustración 45. Análisis de equilibrio estático en el torso	79
Ilustración 46. Análisis de equilibrio estático en la barra para modelo libre	80
Ilustración 47. Atleta realizando la sentadilla en la máquina Smith.....	83
Ilustración 48. Plataforma de fuerza triaxial	83
Ilustración 49. IMU	84
Ilustración 50. Media de los ángulos de las articulaciones obtenidos en las tres repeticiones en el modelo frente al ciclo total del ejercicio	86
Ilustración 51. Velocidades angulares en las articulaciones de cada repetición y la media de las tres para los dos modelos.....	87
Ilustración 52. Aceleraciones angulares obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la aceleración media de todas las repeticiones	88
Ilustración 53. Reacciones verticales y horizontales medidas en la plataforma durante las tres repeticiones para el modelo libre.....	89
Ilustración 54. Reacciones verticales y horizontales medidas en la plataforma durante las tres repeticiones para el modelo guiado.....	90
Ilustración 55. Velocidades lineales de los centros de gravedad de cada segmento en cada repetición (R1, R2, R3) junto con la velocidad media de todas las repeticiones para el modelo libre	92
Ilustración 56. Velocidad de la barra en cada repetición realizada y la media de las tres repeticiones en la sentadilla libre.....	93

Ilustración 57. Aceleraciones lineales obtenidas en el centro de gravedad de cada segmento para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la aceleración media de todas las repeticiones	94
Ilustración 58. Aceleraciones de la barra para cada repetición realizada junto con la media de las tres repeticiones en la sentadilla libre.....	95
Ilustración 59. Gráficas de los pares articulares obtenidos en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con el par medio de cada repetición para el modelo libre.....	96
Ilustración 60. Fuerzas internas horizontales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) en conjunto con la fuerza media de todas las repeticiones.....	98
Ilustración 61. Fuerzas internas verticales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) en conjunto con la fuerza media de todas las repeticiones.....	99
Ilustración 62. Fuerzas internas medias resultantes en cada articulación frente las obtenidas en el eje vertical y horizontal	100
Ilustración 63. Gráfica de la fuerza registrada en la plataforma frente al valor de fuerza obtenida mediante la dinámica del modelo libre	101
Ilustración 64. Velocidades lineales de los centros de gravedad de cada segmento en cada repetición (R1, R2, R3) junto con la velocidad media de todas las repeticiones para el modelo guiado.....	103
Ilustración 65. Velocidad de la barra en cada repetición realizada y la media de las tres repeticiones en la sentadilla guiada	104
Ilustración 66. Aceleraciones lineales obtenidas en el centro de gravedad de cada segmento para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la aceleración media de todas las repeticiones	105
Ilustración 67. Aceleraciones de la barra en cada repetición realizada junto con la media de las tres repeticiones en la sentadilla guiada	106
Ilustración 68. Gráficas de los pares articulares obtenidos en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con el par medio de cada repetición para el modelo guiado.....	107
Ilustración 69. Conjunto de las fuerzas horizontales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la fuerza media de todas las repeticiones	109
Ilustración 70. Conjunto de las fuerzas verticales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la fuerza media de todas las repeticiones	110
Ilustración 71. Fuerzas internas medias resultantes en cada articulación frente las obtenidas en el eje vertical y horizontal	111
Ilustración 72. Gráfica de la fuerza registrada en la plataforma frente al valor de fuerza obtenida mediante la dinámica del modelo guiado	112
Ilustración 73. Variación del CoP anterior-posterior a lo largo del ejercicio de la sentadilla para el modelo libre y guiado.....	114
Ilustración 74. Fuerza resultante en el contacto del pie con la plataforma de fuerza	115

Ilustración 75. Pares normalizados medios de las tres repeticiones para el modelo guiado y libre. La gráfica se muestra frente al tiempo normalizado del ciclo del ejercicio frente al par normalizado	116
Ilustración 76. Desplazamiento horizontal de la barra libre medio de las 3 repeticiones realizadas	117
Ilustración 77. Gráfica del par de la rodilla para barra alta (<i>high-bar back squat (HBS)</i>) y barra baja (<i>high-bar back squat (LBS)</i>) frente al ángulo de la rodilla y el porcentaje de tiempo del ciclo del ejercicio [21]	120
Ilustración 78. Los dos modelos planteados por Andrea Biscarini et al. sobre la sentadilla guiada. Izquierda: modelo ‘Wall Squat’ planteado por Biscarini et al. (2020) [22]. Derecha: modelo de sentadilla guiada en máquina Smith planteado por Biscarini et al. (2011) [10]	121
Ilustración 79. Pares resultantes del modelo ‘Wall Squat’ [22]	122
Ilustración 80. Dependencia de los pares de la rodilla y la cadera en la inclinación del tronco para diferentes valores del ángulo de la rodilla obtenidos en el ensayo de Biscarini et al. para la sentadilla guiada en máquina Smith [10]. Cada gráfica se representa para un ángulo de la rodilla, desde los 170° hasta los 90°	123

MEMORIA

Índice de la memoria

1. INTRODUCCIÓN	3
1.1 Motivación	3
1.2 Objetivos del trabajo	4
1.3 Estructura de la memoria	4
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 Introducción a la sentadilla	5
2.2 Máquinas de musculación para la sentadilla	7
2.3 Variantes de la sentadilla	9
2.3.1 Posición de la barra	11
2.3.2 Posición del cuerpo	13
2.4 Tipos de movimiento: modelo libre vs modelo guiado en máquina Smith	15
2.5 Conceptos básicos de teoría de mecanismos	17
2.5.1 Sólidos rígidos y pares cinemáticos	18
2.5.2 Criterio de Grübler	18
2.5.3 Introducción a la cinemática	19
2.5.4 Introducción a la dinámica	22
3. MODELADO DEL EJERCICIO DE LA SENTADILLA	25
3.1 Modelo matemático	25
3.1.1 Modelo guiado	26
3.1.2 Modelo libre	27
3.2 Datos de estudio	28
3.2.1 Parámetros antropométricos	30
3.2.2 Eslabones	35
3.2.3 Barra	37
3.3 Análisis cinemático	37
3.3.1 Problema de posición	37
3.3.2 Velocidad y aceleración de los sólidos rígidos	45

3.4	Análisis dinámico	51
3.4.1	Modelo guiado.....	51
3.4.2	Modelo libre	57
3.4.3	Centro de presiones (CoP)	62
3.5	Experimentación	62
3.6	Datos de partida.....	65
3.6.1	Posición angular de las articulaciones	65
3.6.2	Velocidades angulares de las articulaciones.....	66
3.6.3	Aceleraciones angulares de las articulaciones.....	67
3.6.4	Curvas de fuerza de la plataforma.....	69
4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	71
4.1	Modelo libre.....	71
4.1.1	Velocidades.....	71
4.1.2	Aceleraciones.....	73
4.1.3	Pares articulares	75
4.1.4	Fuerzas internas en las articulaciones	77
4.1.5	Reacción en el suelo	81
4.2	Modelo guiado	82
4.2.1	Velocidades.....	82
4.2.2	Aceleraciones.....	84
4.2.3	Pares articulares	86
4.2.4	Reacciones en las articulaciones.....	88
4.2.5	Reacción en el suelo	92
4.3	Análisis comparativo de resultados entre los dos modelos	92
4.4	Comparativa con bibliografía.....	98
4.4.1	Modelo libre	98
4.4.2	Modelo guiado.....	100
5.	CONCLUSIONES	105
6.	BIBLIOGRAFÍA.....	107

1. Introducción

1.1 Motivación

Las actividades para muscular y fortalecer el cuerpo se conocen como culturismo o powerlifting, el cual está cada vez más presente en la sociedad. Es por ello por lo que cada vez existen más sistemas de musculación diferentes en el mercado. Centrándose en el mundo del powerlifting se pueden diferenciar tres ejercicios básicos: sentadilla, press banca y peso muerto. Estos tres movimientos también se conocen por las siglas SBD: Back Squat (S), Bench Press (B) y Deadlift (D).

En los entrenamientos de fuerza que hacen referencia a estos tres ejercicios, existe un gran abanico de opciones para que sea el usuario quien elija el tipo de máquina con la que quiere fortalecer sus músculos. Dentro de un mismo ejercicio, existe la posibilidad de realizar el levantamiento con dos tipos de cargas: peso libre y peso guiado.

En cuanto al peso libre se refiere, el deportista levanta con una masa totalmente libre de sujeciones y restricciones al movimiento. La elección entre un sistema de carga libre o uno guiado viene definido por los objetivos planteados, planificación o entreno. El peso libre se emplea cuando la masa muscular es baja y se requiere ganar músculo, o bien cuando el atleta se encuentra en el período de ‘volumen’, que se trata de una temporada planificada para la constante ganancia de masa muscular.

Por el contrario, si se está ante un deportista experimentado que prefiere focalizar el estímulo en músculos concretos, se opta por un sistema de carga guiada o las conocidas en el ámbito fitness como ‘máquinas’, que como bien indica su nombre, son máquinas de carga guiada que se trabaja un grupo de músculos determinado del cuerpo humano.

El enfoque planteado para este estudio es una comparación de un sistema de carga guiada y un sistema de carga libre. El movimiento escogido es la sentadilla, sobre el cual se va a modelar y estudiar el cuerpo como un modelo de eslabones articulados, donde se obtendrán las fuerzas y pares de las articulaciones principales (tobillo, rodilla y cadera) para cada sistema de carga. Para este ejercicio, el mecanismo de peso guiado es la máquina Smith, frente la barra olímpica tradicional que se emplea para el peso libre.

1.2 Objetivos del trabajo

El objetivo principal de este TFG es elaborar modelos matemáticos para el ejercicio de sentadilla en peso libre y en peso guiado, y realizar una comparativa de la biomecánica de ambas modalidades.

Se plantean los siguientes subobjetivos:

- Desarrollar modelos matemáticos del ejercicio de sentadilla en peso libre y con máquina Smith, que permitan obtener la cinemática y dinámica de dichos ejercicios.
- Comparar aspectos cinemáticos y dinámicos entre el modelo libre y guiado en máquina Smith en base a los resultados dados por los modelos matemáticos.

1.3 Estructura de la memoria

El presente documento se organiza en los siguientes capítulos:

- En el Capítulo 1 se expone la motivación y los objetivos del trabajo.
- El Capítulo 2 recoge información relacionada con el estado del arte de la sentadilla, modelos biomecánicos y teoría de mecanismos, así como recursos adicionales para la realización de este estudio. Se destacan artículos, revistas, libros, documentos de texto, entre otros.
- El Capítulo 3 expone el proceso de representación gráfica, estudio y cálculo del modelo de la sentadilla sobre el que se va a plantear el problema de posición, cinemática y dinámica. Es en este mismo capítulo donde se resuelven y se obtienen los modelos cinemáticos y dinámicos que definen el modelo guiado y libre del ejercicio de la sentadilla.
- En el Capítulo 4 se representan y se muestran los resultados obtenidos en los dos modelos. Se obtiene una respuesta graficada para el problema cinemático y dinámico, representando velocidades, aceleraciones, pares y fuerzas. Además, se realiza una comparativa bibliográfica para cada modelo con artículos que se han obtenido en la investigación realizada en el Capítulo 2 y un análisis de diferencias entre el modelo guiado y libre.
- El Capítulo 5 recoge las conclusiones obtenidas en la realización del estudio.

2. Revisión bibliográfica

2.1 Introducción a la sentadilla

A día de hoy, para definir y tonificar los músculos existen distintas variables donde la fuerza es la principal protagonista. Un claro ejemplo, es el culturismo y el powerlifting, unas variantes deportivas de filosofía un tanto distinta al concepto fitness, pero con algunos ejercicios que han marcado el camino de este. En los entrenamientos de fuerza derivados de la modalidad de powerlifting tratan los tres ejercicios básicos más completos para muscular el cuerpo y, que, a raíz de estos, se han ido desarrollando distintas modalidades y ejercicios similares. Los básicos son los siguientes: press banca, peso muerto y sentadilla. Estos últimos, fueron trasladados al mundo del fitness y cada vez es más la gente que los realiza incluso en ejercicios aeróbicos.

La sentadilla, es uno de los movimientos básicos que ha sido llevado del mundo del culturismo al fitness. En la planificación de entrenamiento de un deportista o cualquier persona que realice entrenamientos, este ejercicio es un básico y esencial en sus programaciones y planificaciones, pues se trata de un ejercicio de musculación muy completo y funcional, ya que se tonifican varios grupos musculares en su realización, además, sin peso añadido resulta un movimiento completamente natural.

Los primeros registros de la sentadilla se remontan al siglo XIX, cuando el famoso padre del fisicoculturismo Eugen Sandow¹ recomendó en sus publicaciones la realización de sentadillas como método de musculación y desarrollo de los cuádriceps. No fue hasta principio del siglo XX, cuando aparecieron las sentadillas que conocemos a día de hoy con carga, aunque el apoyo se hacía sobre la parte anterior de la planta del pie y con los talones juntos y elevados del suelo. A esta técnica, se le denominó “flexión profunda de rodillas” [1].

En los primeros años de implementación de la sentadilla, no existían sistemas de soporte para apoyar la barra antes de empezar a realizar el movimiento, pues es en el año 1921, que Alan Calvert², ingenió un sistema de levantamiento de la barra para la realización de la sentadilla. Este sistema fue denominado “*Steinborn*”, era un sistema poco ortodoxo, pero gracias a este, se podía levantar la barra y posicionarla sobre los hombros [2].

¹ Friederich Wilhelm Müller (1867-1925), también conocido como Eugen Sandow, nació en Königsberg, la actual Kaliningrado, Rusia. Fue conocido como el primer culturista de la historia y padre del culturismo moderno [25].

² Alan Calvert (1875-1944) fue un hombre de negocios de Filadelfia y levantador de pesas, fundador de Milo Barbell Company (1902) y creador de la revista *Strenght* donde publicó y promovió las virtudes de los entrenamientos con pesas [26].



Ilustración 1. Flexión profunda de rodillas [1].

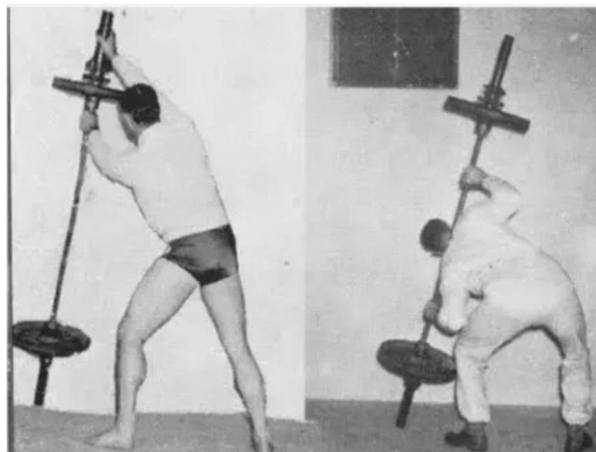


Ilustración 2. Método 'Steinborn' [1].

Actualmente, se han extendido distintas variantes del ejercicio de la sentadilla por los gimnasios, además, su práctica se puede llevar a cabo en otros entornos como en el salón o el jardín de casa, por la simpleza del ejercicio, al no requerir material adicional si esta se realiza sin peso, de lo contrario, se debería disponer únicamente de algún sistema de carga como mancuernas, una barra con discos, sacos de peso u otras alternativas. Son cada vez más las personas que realizan sentadillas de cualquier tipo para muscular toda la zona inferior del cuerpo, ya que es un movimiento que implica muchos músculos y se puede entrenar de forma aeróbica.

2.2 Máquinas de musculación para la sentadilla

En la actualidad existen dos sistemas principales de máquinas de musculación para la realización de las sentadillas, los sistemas guiados y los sistemas de carga libre.

En los sistemas guiados se encuentra la máquina Smith, inventada en la década de los años 1950 por el estadounidense y experto en fitness Jack LaLanne³, el cual se muestra en la Ilustración 3. Su afán por mejorar e innovar le llevó a construir una máquina que le permitiera levantar pesos pesados en cucillillas de forma segura mediante un sistema de deslizamiento lineal sin necesidad de tener algún observador que controlase su movimiento. Esta máquina fue tan popular que años más tarde, iconos como Arnold Schwarzenegger incluyeron esta herramienta de musculación en todos sus entrenamientos [3].



Ilustración 3. Jack LaLanne junto a una máquina Smith [3].

Se pueden distinguir distintos tipos de máquinas con desplazamiento lineal partiendo de una misma base. Existen dos tipos principales, las verticales o en ángulo. En las primeras, son completamente verticales, el movimiento se realiza de forma vertical hacia arriba y hacia abajo, mientras que, en las segundas, los postes que soportan el peso de la barra están ligeramente inclinados, teniendo un ángulo de entre 5 y 7 grados. Esta pequeña inclinación permite ofrecer un rango de movimiento (ROM) más natural al realizar el ejercicio. También cabe añadir, que existe un tercer tipo de máquinas Smith, las que incluyen funciones y accesorios, como poleas o soportes para realizar dominadas, lo que hace que sea una máquina más completa y funcional [4].

³ Jack LaLanne (1914-2011) fue un inventor y experto en fitness considerado el padrino del fitness moderno. Presentó el entrenamiento con pesas y la nutrición a las masas, además del diseño de muchas de las máquinas de gimnasio que la gente a día de hoy sigue utilizando [27].

En la Ilustración 4 se muestra la máquina de la casa *Titanium Strengh* modelo *160SC Smith Machine* a la izquierda, con un masa de 118 kg sin cargas añadidas y combinado con un rack⁴ regulable en 14 posiciones.



Ilustración 4. Máquinas Smith. Izquierda: Titanium Strengh Smith Machine 160SC. Derecha: Titanium Strengh RM10 Evolution Deluxe [4].

Por el contrario, los sistemas de carga libre, a diferencia de la máquina Smith, carecen de sistemas de rodamientos lineales, lo que hace que sencillamente sean la unión de barras metálicas que conforman una estructura sobre la cual se va a apoyar la barra que se va a cargar con discos de peso. El rack de sentadillas mostrado en la Ilustración 5 es un claro ejemplo de un sistema enfocado al levantamiento de peso libre. Un conjunto de barras que proporcionan una estructura completamente isostática con capacidad de soportar una cantidad de peso importante en sus extremidades. Su uso es muy sencillo, que simplemente sirve de apoyo para la barra mientras se carga el peso y tiene dos barras laterales a la altura de la cadera aproximadamente, que permiten proporcionar seguridad en el movimiento de la sentadilla, pues si cuando en la realización del mismo el atleta se ve desequilibrado o el peso no se adecua a sus capacidades y sufre una caída, los laterales del rack proporcionan un apoyo que evita que la barra caiga al suelo pudiendo causar un daño fatal al atleta.



Ilustración 5. Rack de sentadillas [4].

⁴ Los racks y las jaulas son aparatos de musculación necesarios para realizar entrenamientos de musculación con peso libre [24].

2.3 Variantes de la sentadilla

En primer lugar, es necesario subrayar que según el tipo de sentadilla que se realice se efectuará un trabajo en unos músculos u otros [5]. Además, la carga es un factor determinante a la hora de la realización del ejercicio de la sentadilla. A continuación, se exponen las sentadillas más usuales en función de la carga y, se resume de forma breve la ejecución del movimiento en cada variante.

SIN CARGA	
Sentadilla clásica. Se ejecuta colocando los pies ligeramente separados de la vertical con los hombros, mientras se baja el glúteo simulando la acción de sentarse en una silla. En este movimiento se realiza una flexión de los tobillos, rodilla y cadera.	 Ilustración 6. Sentadilla clásica sin carga [6].
Sentadilla búlgara. Se ejecuta con un punto de apoyo donde se coloca uno de los pies, de esta manera una rodilla queda suspendida en el aire mientras la otra sigue rígida apoyada en el pie que está en el suelo. A continuación, la rodilla de la pierna apoyada desciende hasta una distancia muy cercana al suelo o tocándolo levemente. Se requiere equilibrio y fuerza en el core⁵. El ejercicio se puede hacer sin carga, con mancuernas o en la máquina Smith.	 Ilustración 7. Realización de la sentadilla búlgara [6].
CON CARGA	
Sentadilla libre. Se realiza igual que en la sentadilla clásica. La diferencia existente entre ambas es la barra que se apoya sobre los hombros, que supone una carga a vencer mientras se ejecuta el movimiento.	 Ilustración 8. Sentadilla clásica con barra [6].

⁵ Término inglés que indica la zona que comprenden los músculos abdominales, lumbares, de la pelvis y los glúteos.

Sentadilla en máquina Smith. En especial en este tipo de movimiento, es interesante destacar las diferencias frente la sentadilla libre, puesto que el movimiento aparentemente es el mismo. En este tipo de sentadillas la espalda inferior en la parte final del recorrido realiza un movimiento no natural frente al que se realiza en la sentadilla libre.

Es tal así, que el arqueado lumbar que se genera aumenta la tensión en la parte baja de la espalda y, es por esa razón, que en la sentadilla guiada en máquina Smith la profundidad de bajada no será la misma que la sentadilla libre si los pies se encuentran a una misma distancia. En este tipo de sentadilla los pies se pueden colocar en distintos ángulos, siendo entre 20° y 45° una posición óptima [7].



Ilustración 9. Sentadilla guiada en la máquina Smith [6].

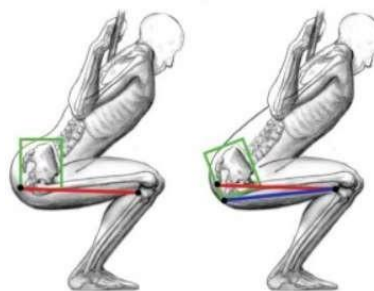


Ilustración 10. Izquierda: posición de la pelvis en la sentadilla libre. Derecha: posición de la pelvis en la sentadilla guiada [7].

Sentadilla sumo. Se ejecuta, como su nombre indica, con una posición similar a la que adoptan los luchadores de sumo en sus combates. Las piernas se abren a una distancia de los hombros muy superior a la de la sentadilla clásica. El movimiento consiste en flexionar las rodillas y descender el torso hacia abajo. Cabe señalar que esta variante se realiza con una mancuerna o un kettlebell⁶, aunque en ocasiones puede realizarse sin carga.

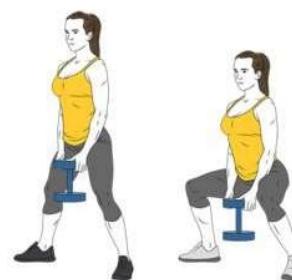


Ilustración 11. Sentadilla sumo [6].

En todas las modalidades presentadas hasta ahora, cabe destacar que los músculos predominantes en la ejecución del movimiento son el bíceps femoral, glúteo, cuádriceps y en algunos casos el gemelo, siendo los principales actuadores que ejercen la fuerza en el levamiento el glúteo y el bíceps femoral, junto con el cuádriceps.

⁶ Kettlebell o Pesa rusa es un bloque de hierro fundido con un asa en la parte superior.

Las articulaciones afectadas son el tobillo, la cadera, las rodillas y la espalda, pues son los principales puntos de rotación que permiten el desplazamiento ascendente y descendente del movimiento.

Cabe añadir, que el movimiento de la sentadilla requiere una técnica de realización sencilla, pero, cuando se le añade peso, es un movimiento que dificulta en muchos casos la ejecución de la misma en una postura correcta. Los errores más comunes en su realización es descender en el movimiento de forma brusca, sin controlar la bajada, y a la vez flexionar el torso hacia adelante, pudiendo llegar a generar lesiones importantes. Una de las lesiones más frecuentes es el dolor de espalda en la zona lumbar, debido a la inclinación del torso flexionado o a una mala colocación de la barra, pues incrementa la tensión en la zona baja de la espalda, lo que se presenta la posibilidad de una lesión por hernia discal⁹. Además, según el posicionamiento, las rodillas también sufrirán una mayor tensión, pudiendo llegar a existir una lesión en las mismas.

2.3.1 Posición de la barra

El apoyo correcto de la barra durante la realización de la sentadilla según un análisis biomecánico del ejercicio, debe ser cercano a los hombros, para ejercer mayor presión sobre la barra e impedir que la espalda genere un esfuerzo indeseado sobre las lumbares, generando posibles lesiones [8]. La posición correcta se encuentra por debajo de la vertebra cervical C7, como se muestra en la Ilustración 12, en la zona de las escápulas, donde ahí la barra aporta un apoyo más cómodo y hace posible levantar un mayor peso. Por contra, el peso se transfiere hacia los glúteos e isquiotibiales, lo cual, existe un mayor peligro en caso de principiantes, ya que la fuerza a ejercer es mayor. Se debe trabajar con pesos acordes a la musculatura y capacidad de cada persona, algo básico que hay que considerar y valorar en todos los ejercicios de fuerza [8].

⁹ Lesión de la columna vertebral en la que parte del disco intervertebral (núcleo pulposo) se desplaza hacia la raíz nerviosa, la presiona y produce un intenso dolor [23].

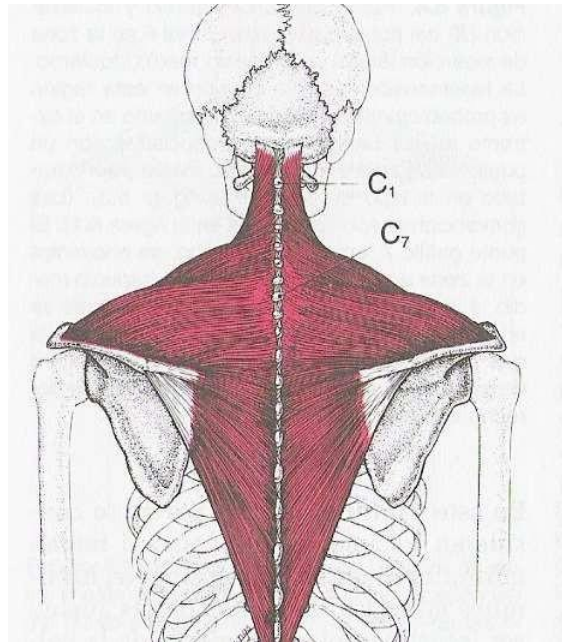


Ilustración 12. Vértebra C7 [9].

Para la realización del modelo de la sentadilla de estudio, la barra se considera apoyada sobre el músculo trapecio mostrado en la Ilustración 13, situado a la misma altura de los hombros.

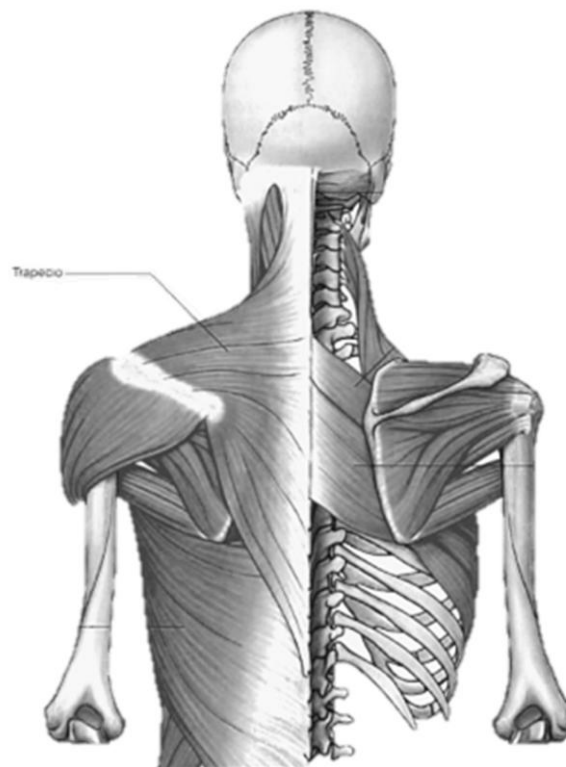


Ilustración 13. Músculo trapecio [9].

Las variables a considerar en la barra van a ser únicamente dos, el centro de gravedad y la masa, pues se trata de un sólido que va a tener únicamente movimiento de translación, lo que se traduce en un movimiento lineal sin consideraciones rotacionales, por lo cual, la inercia y el radio de giro no son necesarios para la obtención del modelo.

2.3.2 Posición del cuerpo

Según el modelo trabajado, el cuerpo define un conjunto de ángulos que representa el máximo y mínimo recorrido de una articulación que une dos sólidos rígidos, representando en cada instante una posición diferente.

En la realización del ejercicio existen distintas fases, las cuales definen los ángulos de cada articulación. En primer lugar, la fase excéntrica es donde inicia el movimiento en estático y va descendiendo hasta llegar a la contracción que se produce en la siguiente fase. En esta primera, los músculos están estirados y actúan sujetando el peso que se esté soportando en ese instante. También se conoce como fase negativa. En segundo lugar, la fase isométrica se produce en el instante donde se llega al final del recorrido y se produce un equilibrio estático de la masa total que recae sobre el trapecio. Por último, existe la fase concéntrica, conocida como positiva, donde los músculos se contraen para levantar todo el peso que el cuerpo está soportando.

A continuación, se muestra la fase excéntrica del movimiento, lo que representa el inicio, frente a una posición isométrica, que se sitúa en la posición más baja del recorrido.

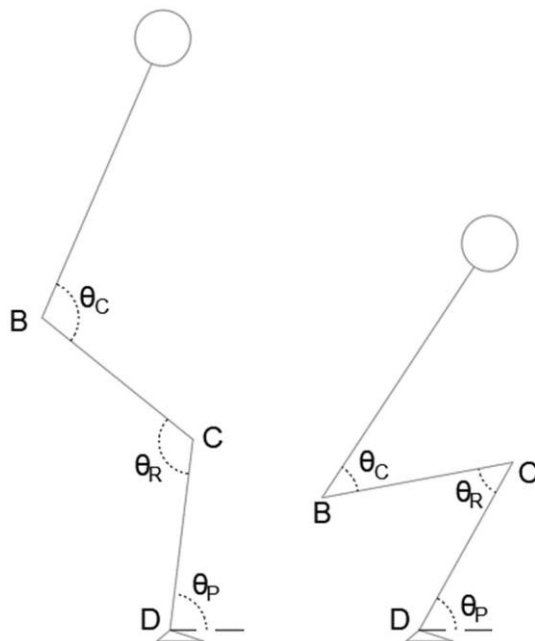


Ilustración 14. Izquierda: Posición excéntrica de inicio del movimiento; Derecha: Posición isométrica, en el siguiente movimiento ascendente se inicia la fase concéntrica.

Para el desarrollo del modelo de que ocupa el estudio que se va a realizar sobre la sentadilla, se plantea un sistema siguiendo como referencia el modelo de Biscarini et al. [10], con algunas modificaciones que se muestran en el apartado 3.3, en el cual se modelan los pares de torsión y cargas articulares durante la sentadilla en la máquina Smith y en la sentadilla guiada. Las principales diferencias del modelo planteado por este estudio frente al planteado por Biscarini recaen en los centros de gravedad, donde Biscarini considera únicamente un centro de gravedad para todo el cuerpo, mientras en este estudio se consideran tres centros de gravedad, uno para cada principal segmento del cuerpo (pierna, muslo y torso).

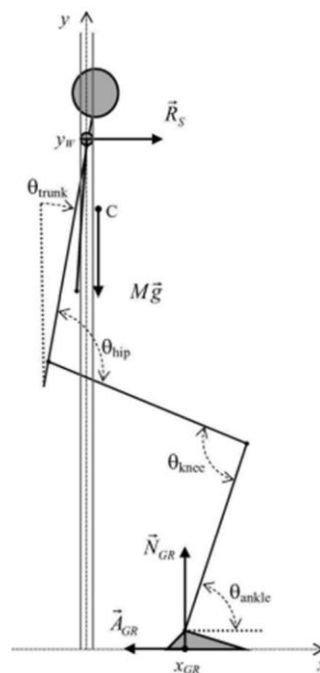


Ilustración 15. Modelo planteado por Biscarini et al. [10].

El modelo de Biscarini et al. [10] mostrado en la Ilustración 15 define el modelo de la sentadilla guiada en máquina Smith como un sujeto con una barra apoyada en la espalda alta, sobre los hombros, donde solo se mueve a lo largo del eje vertical, debido a la restricción mecánica impuesta por las guías verticales. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema constituido por el cuerpo del sujeto y la barra de pesas cargada son: el peso del conjunto, las fuerzas de reacción que las guías de la máquina Smith ejercen sobre la barra de pesas y las fuerzas de reacción del suelo que actúan simétricamente en cada pie.

Para cualquier valor dado de la carga externa, el par en las articulaciones de la cadera y la rodilla puede verse sometido a modificaciones al cambiar la configuración del cuerpo y la posición dentro de la máquina Smith, es decir, al cambiar uno o más de los parámetros como: la inclinación del tronco hacia adelante, mover el pie hacia adelante con respecto a la rodilla y desplazar la distribución de peso hacia la parte delantera del pie, entre otras [10].

2.4 Tipos de movimiento: modelo libre vs modelo guiado en máquina Smith.

Este punto influye en el documento como introducción a lo que posteriormente se va a analizar en el estudio. Trata sobre una comparativa efectuada entre el modelo libre y el modelo guiado de la sentadilla realizada en un artículo científico, pues se añade como un preámbulo de los puntos que se verán a continuación.

Cuando se hacen planificaciones de entreno, se debe considerar los tipos de ejercicios que se van a realizar y sus respectivos sistemas de carga. En el caso de la sentadilla, a menudo cuando se entrena la resistencia para mejorar la potencia en la parte inferior del cuerpo, se emplea la sentadilla con barra. Este tipo de sentadillas se pueden realizar con dos modelos de carga, el sistema del modelo de carga libre (FW¹⁰) o su realización con una máquina Smith (SM). La principal diferencia está en el tipo de movimiento, pues el FW permite el movimiento en múltiples planos, mientras que el dispositivo SM restringe el movimiento de la barra en el plano frontal, lo que hace que su ejecución se centre en subir y bajar el cuerpo empujando con las piernas de manera guiada [11].

Existe una clara evidencia de que, aunque el movimiento general de la sentadilla sea el mismo, el movimiento libre y el guiado se realizan de formas distintas. En el modelo SM el atleta puede sentirse más cómodo en el levantamiento, puesto que el sistema le permite levantar un peso extra debido a la imposibilidad de movimiento en el plano frontal, lo que hace que la fuerza de equilibrio que supone la estabilidad de la barra en la espalda sea nula en este modelo. En cambio, en el modelo FW el atleta tiene que estar en constante equilibrio al realizar el rango de movimiento [12].

A continuación, se va a tratar un estudio comparativo realizado por el *Department of Health, Physical Education, and Recreation* de la *Emporia State University* en *Kansas, USA*. La investigación se basó en una comparativa realizada entre las dos modalidades existentes en la sentadilla, dando lugar al nombre "*The Kansas Squat Test Modality Comparison: Free-Weight vs. Smith Machine*" [12].

Para analizar la comparativa usaron el test de sentadillas de Kansas (KST), una prueba de levantamiento válida para medir los índices de potencia media y máxima en comparación con el ciclo anaeróbico de Wingate (WAnT) ¹¹ en la parte inferior del cuerpo. En el test se llevan a cabo 15 repeticiones de sentadilla con barra, realizadas con rango completo de movimiento y

¹⁰ FW es la abreviatura de Free weight, peso libre en español.

¹¹ El test anaeróbico de Wingate se trata de uno de los procedimientos más comunes de diagnóstico de rendimiento a nivel deportivo. El test se realiza con un deportista, el cual se somete a un esfuerzo máximo en un corto espacio de tiempo, generalmente en 30 segundos, dependiendo de la velocidad de rotación (rpm) y en función de su masa corporal. En los resultados se obtiene la potencia máxima, potencia máxima relativa, potencia media, capacidad anaeróbica e índice de fatiga [28].

velocidad concéntrica máxima, mientras que cada repetición se inicia en un intervalo de 6 segundos. En un primer momento, este test fue diseñado para su empleo con la máquina Smith, pero son muchos los atletas que usan pesos libres para entrenar.

El objetivo principal del estudio fue ver si el uso de FW para el modelo KST era viable en comparación con la SM. El número de atletas participantes ascendió hasta 23, los cuales comprendían unas edades de $20,1 \pm 1,1$ años y unos pesos de $69,7 \pm 10,6$ kg. En el estudio, se determinó la realización de una sentadilla 1RM¹², tanto para la modalidad FW como SM.

En un primer momento, este estudio realizó una investigación sobre la viabilidad de una posible variable FW-KST. Para ello, se examinaron las correlaciones entre la potencia máxima de la parte inferior del cuerpo (PP), potencia media (MP), índice de fatiga relativa (FI) y lactato tras la prueba (HLA), además de pruebas de muestras emparejadas para estudiar las posibles diferencias entre las modalidades.

Después de la realización de toda la recogida de datos, se estudiaron los datos obtenidos y se pudo observar que los coeficientes de correlación¹³ indicaban que existían relaciones significativas entre el FW-KST y el SM-KST en las medidas de potencia máxima de prueba ($r = 0,955$) y prueba media ($r = 0,959$), pero no en fatiga relativa ($r = -0,198$). La respuesta del lactato tampoco mostró una respuesta homogénea para la prueba ($r = -0,109$).

Con lo que respecta a la medición de la fuerza máxima, 1RM, los coeficientes de correlación indicaron una relación significativa cuando se examinaron ($r = 0,952$). Esta relación estuvo presente en hombres y mujeres.

Los resultados del estudio concluyeron que la SM-1RM fue significativamente superior a la FW-1RM, hecho que reafirma lo anteriormente indicado, la sentadilla guiada permite realizar un levantamiento de mayor peso que la sentadilla con peso libre.

¹² El concepto RM en levantamiento de peso es la repetición máxima que una persona puede realizar con ese peso.

¹³ En estadística, el coeficiente de correlación indica la relación lineal existente entre dos variables cuantitativas. Cuanto más cerca está de 1, mayor es su relación de asociación.

2.5 Conceptos básicos de teoría de mecanismos

Como el cuerpo se va a modelar como un mecanismo, se deben conocer conceptos como el de “cadena cinemática”, que se define como un ensamble de eslabones y juntas interconectadas de modo que produzcan un movimiento controlado en respuesta a un movimiento ejercido en los mismos. Una vez definido el concepto de cadena cinemática, se define el concepto de mecanismo, que se identifica como una cadena cinemática en la cual existe un eslabón fijado, es decir, existe un apoyo fijo en la cadena [13].

Las cadenas cinemáticas, como se muestran Ilustración 16, pueden ser abiertas o cerradas. A continuación, se diferencia entre ambas:

- Cadena cinemática abierta: Un mecanismo abierto con más de un eslabón, siempre tendrá más de un grado de libertad, por lo que requiere tantos actuadores (motores) como grados de libertad tenga [13].
- Cadena cinemática cerrada: Un mecanismo cerrado no tendrá puntos de fijación abiertos o nodos, y puede tener uno o más grados de libertad [13].

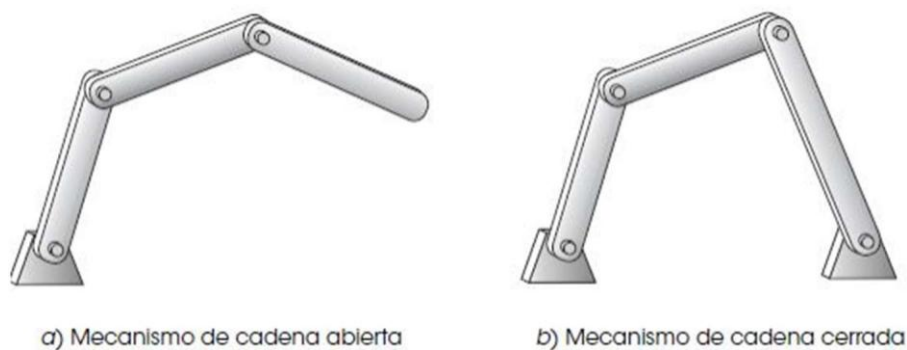


Ilustración 16. Representación de cadena de mecanismos [13].

Cuando se habla de cadena abierta o cerrada se analiza desde el punto de vista cinemático, sin considerar las fuerzas externas. A efectos mecánicos, la biomecánica que afecta al movimiento de la sentadilla considera de cadena abierta, lo que define el modelo como un mecanismo de tres eslabones más el apoyo fijo del suelo.

2.5.1 Sólidos rígidos y pares cinemáticos

Para empezar a analizar en profundidad la mecánica del ejercicio, se precisa conocer los conceptos básicos de teoría de mecanismos que se describen en el modelo matemático que define el cuerpo humano cuando se realiza el ejercicio de la sentadilla.

Los mecanismos están compuestos por distintos elementos, ya sean eslabones, barras, engranajes, poleas, palancas, ejes, etc. Todos los elementos que conforman el mecanismo tienen la virtud de poder realizar un movimiento, excepto uno, que ese será el denominado elemento fijo. En general, los sólidos se componen de partículas materiales, que se desplazan con movimiento relativo unas respecto de otras cuando alguna fuerza o fuerzas exteriores afectan a alguno de estos. Dichas fuerzas causan unos desplazamientos que, en el caso de ser insignificantes, los sólidos se pueden tratar como sólidos rígidos (indeformables). Los sólidos rígidos se conectan mediante pares cinemáticos, que, según su número de conexiones, se pueden considerar binarios, ternarios, etc.

En el caso de estudio que nos ocupa la calificación de los pares se realiza en según el número de conexiones con otros eslabones. Los pares cinemáticos, como conexiones, permiten ciertos movimientos relativos entre elementos, pero impiden otros. Su clasificación depende del número de eslabones que tienen terminación en él.

Asimismo, en el movimiento plano se definen dos tipos de pares desde el punto de vista del número de grados de libertad que restringen:

- **Pares de clase I:** permiten un grado de libertad en el movimiento relativo. Este tipo de pares restringen dos grados de libertad relativos [14]. Ej. Par de revolución, prismático, rotación, etc.
- **Pares de clase II:** permiten dos grados de libertad entre sólidos. Por tanto, restringen un grado de libertad relativo [14]. Ej. par cilíndrico y par planar.

Para poder determinar el grado de libertad de un mecanismo a partir de los elementos y pares cinemáticos que lo componen, se emplea el criterio de Grübler.

2.5.2 Criterio de Grübler

Este criterio se aplica en mecanismos planos o tridimensionales. En el estudio se va a representar un mecanismo en un sistema de dos dimensiones, pues se considera el criterio para mecanismos planos.

Un grupo de N elementos libres, sin pares, tiene $3N$ grados de libertad en el plano, de tal forma que cada elemento tiene tres grados de libertad. Cuando un elemento está fijado (elemento fijo o tierra), se obtienen $3(N-1)$ grados de libertad.

Como indican los principios de la mecánica, para unir un mecanismo se emplean pares cinemáticos. Cada par cinemático añadido, es una restricción de la posibilidad de movimiento de uno de los elementos. Por ejemplo, un par de clase I restringe dos grados de libertad, permite un único movimiento. Asimismo, un par de clase II restringe un grado de libertad, permite dos movimientos. De esta manera, el número de grados de libertad viene determinado por la siguiente ecuación:

$$G = 3(N - 1) - 2 p_I - 2 p_{II} \quad (1)$$

Siendo:

- G : grados de libertad que definen el mecanismo
- N : número de eslabones
- p_I : pares de clase I
- p_{II} : pares de clase II

Resulta de suma importancia tener en cuenta los casos que se pueden dar según el resultado obtenido.

- $G = 0 \rightarrow$ Estructura completamente rígida sin capacidad de movimiento, estructura isostática.
- $G = 1 \rightarrow$ Se puede definir el movimiento del mecanismo entero a partir del movimiento de uno de los elementos.
- $G < 0 \rightarrow$ Se trata de un sistema hiperestático, pues las ecuaciones de la estática no son suficientes para definir el mecanismo. Se puede llamar también estáticamente indeterminada.
- $G > 1 \rightarrow$ Mecanismo de 'n' grados de libertad. Se cuentan tantos eslabones como grados de libertad tenga el mecanismo.

2.5.3 Introducción a la cinemática

La cinemática en mecánica se entiende como el estudio de los movimientos y estados de un cuerpo sin la acción de fuerzas externas. El problema cinemático a resolver en el estudio será la definición de las velocidades y aceleraciones de los sólidos.

En el modelo se requiere la realización de un estudio cinemático, el cual consiste en la obtención de las variables necesarias para obtener una posición y orientación. Se van a obtener las variables posición, velocidad y aceleración de los centros de gravedad.

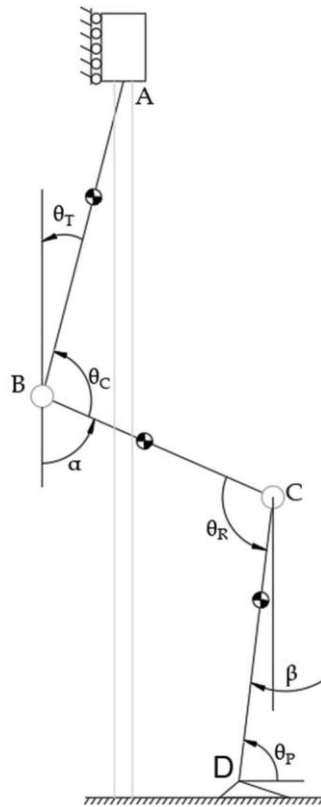


Ilustración 17. Modelo del ejercicio de la sentadilla guiada.

En el modelo representado en la Ilustración 17 se representan tres sólidos rígidos unidos mediante articulaciones con movimiento de traslación y rotación entre sí. El movimiento de traslación se produce en los segmentos que componen el cuerpo, se produce cuando la velocidad es uniforme y los centros de gravedad descienden en ejes imaginarios paralelos entre sí a lo largo de la trayectoria del movimiento. Por otro lado, en el movimiento de rotación la velocidad es variable y se produce cuando se describe un movimiento circular, es decir, cuando en torno a un punto fijo, al realizar el movimiento, cualquier sólido rígido que representa un segmento del cuerpo define una trayectoria circular frente un eje fijo en el plano. Los ángulos son una representación de la rotación que se produce en las articulaciones que unen los sólidos rígidos. En la barra, no va a existir movimiento angular, es decir, rotación, el sólido que define la barra va a estar sometido únicamente a un movimiento de traslación. Estos dos movimientos se representan en la Ilustración 18, donde se muestra la traslación y rotación de un punto sobre un sólido rígido.

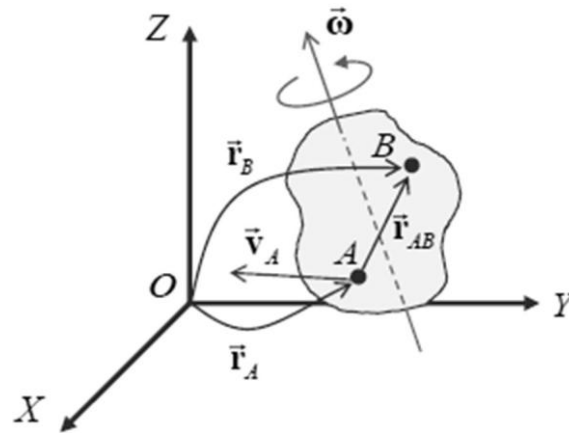


Ilustración 18. Representación de los movimientos de translación y rotación de un punto sobre un sólido rígido [14].

Las velocidades y aceleraciones se pueden dividir en lineales y angulares.

- **Parámetros lineales**

- Posición:

$$x(t) = x \quad (2)$$

- Velocidad:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (3)$$

- Aceleración:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \quad (4)$$

- **Parámetros angulares y vectoriales**

- Posición:

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \vec{\theta}_{AB} \quad (5)$$

- Velocidad:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (6)$$

Donde,

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

- Aceleración:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_{B \rightarrow A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \quad (8)$$

Donde,

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \quad (9)$$

A continuación, se muestra el significado de las variables que aparecen en las anteriores ecuaciones:

- $x(t)$: posición frente al tiempo. Unidades: [m].
- $v(t)$: velocidad frente al tiempo, o también $\frac{dx(t)}{dt}$, que representa la derivada de la posición respecto al tiempo. Unidades: [m/s].
- $a(t)$: aceleración frente al tiempo, o también $\frac{dv(t)}{dt}$ que representa la primera derivada de la velocidad frente al tiempo. Unidades: [m/s²].
- $\theta \rightarrow$: vector de posición angular. Unidades: [rad].
- $\vec{\omega} \rightarrow$: vector de velocidad angular, o también $\frac{d\theta \rightarrow}{dt}$, que representa la primera derivada del vector de posición angular respecto al tiempo. Unidades: [rad/s].
- $\vec{\omega} \dot{=} \alpha \rightarrow$: vector de aceleración angular, o también $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$, que representa la primera derivada del vector de velocidad angular respecto al tiempo. Unidades: [rad/s²].
- $\vec{r}_{A \rightarrow B}$: vector posición. Unidades: [m].

En el modelo representado se van a trabajar con velocidades angulares para definir las aceleraciones y velocidades de los centros de gravedad de los eslabones, con las cuales se van a obtener los pares cinemáticos de las articulaciones a lo largo de todo el recorrido del movimiento de la sentadilla, para el modelo libre y guiado.

2.5.4 Introducción a la dinámica

En la dinámica se estudiarán todas las causas externas que provocan los movimientos que definen el modelo. A partir de la posición, velocidad y aceleraciones se podrá obtener los momentos en los sólidos rígidos que representan los pares cinemáticos de las articulaciones, así como las fuerzas en las que se ven involucrados cada sólido rígido. La dinámica de cada eslabón se analizará de manera independiente, haciendo previamente un esquema general de cada modelo.

Es conveniente diferenciar los tipos de fuerzas que se pueden dar en la dinámica de un mecanismo, pues existen dos tipos: **fuerzas externas** y **fuerzas internas o de reacción**.

Las **fuerzas externas**, son aquellas que pueden generarse debido a algún elemento externo que esté generando un par o fuerza sobre el mecanismo, destacan: las fuerzas aplicadas directamente, fuerzas gravitatorias y fuerzas de inercia.

Las *fuerzas aplicadas directamente* sobre un mecanismo son aquellas que actúan en el mecanismo por el tipo de movimiento o trabajo que realice. Estas, pueden diferenciarse entre fuerzas motrices y fuerzas resistentes útiles.

Por otra parte, las *fuerzas gravitatorias* son aquellas que están relacionadas directamente con la fuerza de la gravedad que actúa en el movimiento del mecanismo. Estas están distribuidas a lo largo del volumen de cada elemento que conforma el sistema y es común considerar el centro de masas como la resultante de todas las fuerzas gravitatorias que reciben cada uno de los componentes.

Así mismo, las *fuerzas de inercia* son las que se producen por el hecho de tener masa, así como a consecuencia de los cambios de velocidad. En un sólido rígido, como es el caso de los mecanismos modelados por eslabones, la inercia afecta a la rotación y traslación. De esta forma, en un sólido rígido con movimiento plano han de considerarse fuerzas de inercia y el par aplicados sobre el centro de gravedad del sólido [14].

En cambio, las **fuerzas internas** son aquellas que impiden que el sólido rígido tenga movimiento relativo entre las distintas partículas. Entre estas fuerzas se incluyen las fuerzas internas y las acciones mutuas, que ambas son consecuencia de la aplicación de las fuerzas externas anteriormente explicadas.

Las *fuerzas internas* son aquellas que producen deformaciones en los miembros del mecanismo. Cuando se trata de un sólido elástico, las deformaciones producidas se recuperan en fases posteriores, cuando se repite el estado de carga inicial. Normalmente, las deformaciones son pequeñas y no tienen una influencia lo suficientemente importante como para poder considerar que afectan al comportamiento de la máquina en algunos casos, por lo que se pueden despreciar y tomar los cuerpos como sólidos rígidos.

Por el lado contrario, las *acciones mutuas* son fuerzas de contacto entre los elementos y suelen tener una componente normal y tangencial sobre las superficies de contacto. Si el rozamiento es nulo y el comportamiento completamente elástico, las fuerzas de contacto no realizan trabajo ni disipan energía [14].

En el modelo planteado se van a estudiar principalmente las fuerzas externas, considerando estas como las principales fuerzas que afectan al movimiento del cuerpo, así como fuerzas gravitatorias, las de los elementos externos como son las fuerzas de la barra y las fuerzas de inercia, a consecuencia de los cambios de velocidad en el movimiento.

- Centro de presiones

El centro de presiones (CoP) se relaciona con la dinámica del sistema por ser el promedio de todo el peso del cuerpo que está en contacto con la superficie del suelo. Para el estudio de la

estabilidad del sistema se va a emplear el cálculo del mismo. Además, el CoP corresponde al punto del apoyo de la superficie con el pie donde se encuentra situado el vector de fuerzas de reacción del suelo. En ese mismo punto, los momentos que se generan son nulos [15].

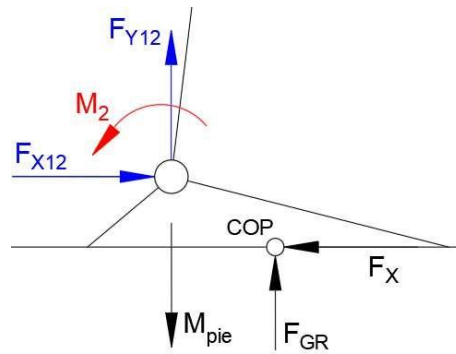


Ilustración 19. Representación gráfica del CoP.

En la Ilustración 19 se muestra el análisis de cuerpo libre del tobillo con las fuerzas y momentos que se generan en la articulación, donde, en el apartado 3.4 se realiza el estudio de dichas fuerzas y momentos. La reacción vertical (F_{GR}) y horizontal (F_X) del suelo son las dos principales fuerzas que inciden sobre el CoP. El CoP situado en el pie varía a lo largo del ejercicio, donde se encuentra a una distancia distinta en el plano horizontal en cada instante.

3. Modelado del ejercicio de la sentadilla

3.1 Modelo matemático

En la realización del estudio para la obtención de pares cinemáticos, se diferencian dos variantes, un modelo de sentadilla guiada con la máquina Smith y un modelo de sentadilla libre. Se asumen una serie de hipótesis simplificadoras para realizar el modelo matemático:

1. Se consideran únicamente la rotación de las articulaciones principales: tobillo, rodilla y cadera.
2. Se suponen ideales las articulaciones mencionadas en el punto 1.
3. El ejercicio se representa en un solo plano (XY).
4. La actuación de los músculos se va a representar como pares articulares equivalentes.
5. Se considera un centro de gravedad para cada sólido rígido que define el cuerpo humano.

El planteamiento del estudio de ambos modelos se puede observar en la Ilustración 20, donde se representan los modelos de sentadilla guiada y libre, respectivamente, observando una reacción horizontal en el punto de apoyo de la barra en la deslizadera que imposibilita el movimiento en el eje horizontal.

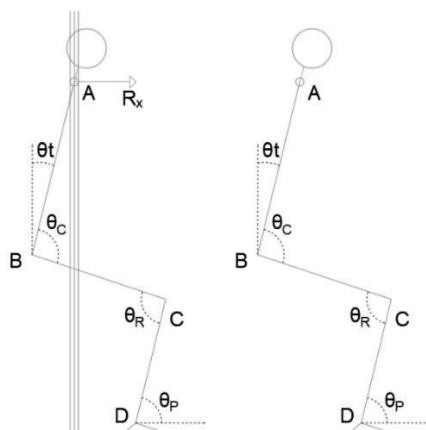


Ilustración 20. Izquierda: Modelo guiado. Derecha: Modelo libre.

3.1.1 Modelo guiado

El modelo matemático planteado en el tipo de sentadilla guiada con máquina Smith se va a analizar siguiendo la teoría de mecanismos, modelando de esta manera el sistema como un mecanismo compuesto por tres principales eslabones. En la Ilustración 21 se representa el cuerpo del sujeto modelado por eslabones, considerando la tierra como un eslabón. La barra se representa en la figura como el círculo rojo que aparece por debajo de la cabeza del usuario.

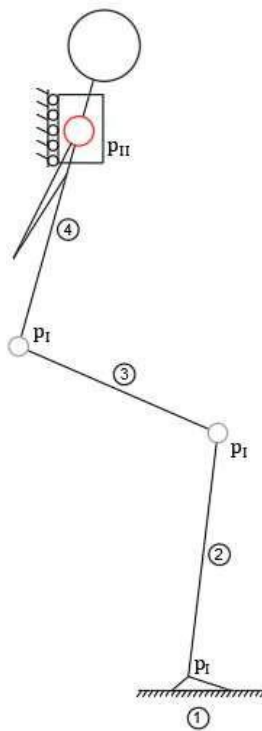


Ilustración 21. Representación de los pares cinemáticos en el modelo guiado.

Los eslabones figurados en la Tabla 1 se consideran según lo representado en la Ilustración 21.

Eslabones (Sólidos rígidos)		
	Cantidad	Tipo
Pierna o caña	1	Binario
Muslo	1	Binario
HAT	1	Binario
Tierra	1	Binario
Σ Eslabones	4	

Tabla 1. Número y tipo de eslabones del modelo guiado.

Este modelo guiado no considera la máquina Smith como eslabón, pues en la realización del ejercicio no se ejerce ningún par en ese punto, al estar guiado sobre un eje los pares resultan nulos en ese punto.

Pares cinemáticos		
	Cantidad	Clase
Rodilla	1	Clase I (Revolución)
Cadera	1	Clase I (Revolución)
Tobillo	1	Clase I (Revolución)
Deslizadera	1	Clase II (Corredera con par de rotación)

Tabla 2. Pares cinemáticos del modelo guiado.

Mediante el método de Grübler se pueden obtener los grados de libertad:

$$G = 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot p_I - p_{II} = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 = 9 - 6 - 1 = 2 \text{ gdl} \quad (10)$$

Se trata de un mecanismo de dos grados de libertad, lo que se traduce en que se requieren dos de los movimientos o grados de libertad para definir la posición del mecanismo completa.

3.1.2 Modelo libre

El modelo matemático planteado en el tipo de sentadilla libre se analiza de la misma forma que el modelo guiado, mediante un sistema de eslabones. En la Ilustración 22 se representa el cuerpo del sujeto modelado por eslabones en la sentadilla libre.

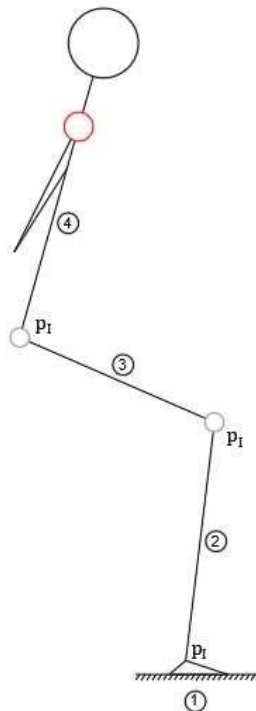


Ilustración 22. Representación de los pares cinemáticos para el modelo libre.

En la Tabla 3 se muestran los eslabones que conforman el sistema libre.

Eslabones (Sólidos rígidos)		
	<i>Cantidad</i>	<i>Tipo</i>
<i>Pierna</i>	1	Binario
<i>Muslo</i>	1	Binario
<i>HAT</i>	1	Binario
<i>Tierra</i>	1	Binario
Σ Eslabones	4	

Tabla 3. Número y tipo de eslabones del modelo libre.

En este modelo libre si se considera la barra como un eslabón, ya que en la realización del ejercicio se ejerce un par en ese punto, pues existe una fuerza que es la que genera estabilidad en la parte superior del torso y evita que el individuo se desplace hacia adelante o hacia atrás.

Pares cinemáticos		
	<i>Cantidad</i>	<i>Clase</i>
<i>Rodilla</i>	1	Clase I (Revolución)
<i>Cadera</i>	1	Clase I (Revolución)
<i>Tobillo</i>	1	Clase I (Revolución)

Tabla 4. Pares cinemáticos del modelo libre.

Mediante el método de Grübler se pueden obtener los grados de libertad:

$$G = 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot p_I - p_{II} = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 3 - 0 = 9 - 6 = 3 \text{ gdl} \quad (11)$$

Existe una diferencia entre la modalidad guiada y libre, pues en este último caso estamos ante un modelo libre con tres grados de libertad, lo que supone un parámetro independiente añadido necesario para definir completamente su posición, frente al modelo guiado que tiene un grado de libertad inferior. Este parámetro añadido va a ser la plataforma de fuerza empleada para obtener los parámetros de fuerzas en los ejes verticales y horizontales.

3.2 Datos de estudio

Antes de proceder al cálculo de las variables físicas, hay que establecer una serie de parámetros para obtener los posteriores resultados.

Para la obtención de los pares cinemáticos articulares, se procede a estudiar el cuerpo como eslabones independientes con centros de masas propios, de forma que se obtiene un resultado más preciso.

Se dividen en tres eslabones principales:

1. Eslabón superior: se considera la cabeza, cuello, torso, brazos. Todo el conjunto se conoce como HAT (head, arms and trunk). El peso de la barra se considerará para el caso guiado como dos sólidos unidos rígidamente.
2. Eslabón medio: se considera el muslo, que comprende desde la cadera hasta la rodilla.
3. Eslabón inferior: se considera la pierna, que se sitúa desde la rodilla hasta el tobillo. El pie no se considera, ya que no va a tener movimiento, por lo tanto, no va a existir inercia. Lo vamos a modelar como un apoyo fijo, siendo el tobillo la articulación de rotación.

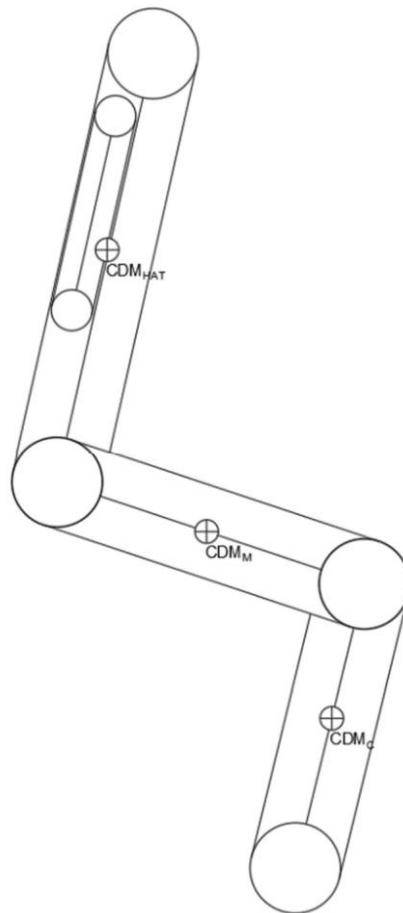


Ilustración 23. Modelo de eslabones que definen el cuerpo en la sentadilla.

Antes de empezar con la definición de los ángulos, se van a establecer los parámetros antropométricos que van a ser empleados para la obtención de la cinemática completa.

3.2.1 Parámetros antropométricos

En este punto se ha analizado el cuerpo según el modelo de Contini et. al [16] que se muestra en la Ilustración 24. En ella se representan los parámetros de los segmentos del cuerpo que define todas las longitudes de cada parte del cuerpo en función de la altura del cuerpo de un hombre o mujer. El estudio se realizará con los parámetros antropométricos de un sujeto masculino de origen mediterráneo.

Para la obtención de los valores de los datos antropométricos se define el concepto de *distal* y *proximal* empleado para definir el centro de gravedad de cada uno de los eslabones que componen el cuerpo. La distancia distal hace referencia a un punto localizado lejos de un lugar específico, en este caso, del centro del cuerpo. Por el contrario, la distancia proximal¹⁶ indica cuando se encuentra más cerca del centro del cuerpo [17].

La definición de la distancia proximal y distal en el torso puede causar confusión, ya que en ese segmento se encuentra el punto de referencia sobre el cual se obtienen las distancias proximales y distales. En el artículo de Soto, V.M. y Gutiérrez, M sobre los 'Parámetros inerciales para el modelado biomecánico del cuerpo humano' [18] indica que la distancia proximal al torso es la que se encuentra desde el centro del mismo hasta el hueco supraesternal, justo debajo del cuello, mientras que la distancia distal va hasta la cadera media.

¹⁶ La distancia proximal significa más cerca del centro (tronco del cuerpo) o del punto de unión con el cuerpo. Proximal es el opuesto de distal [32].

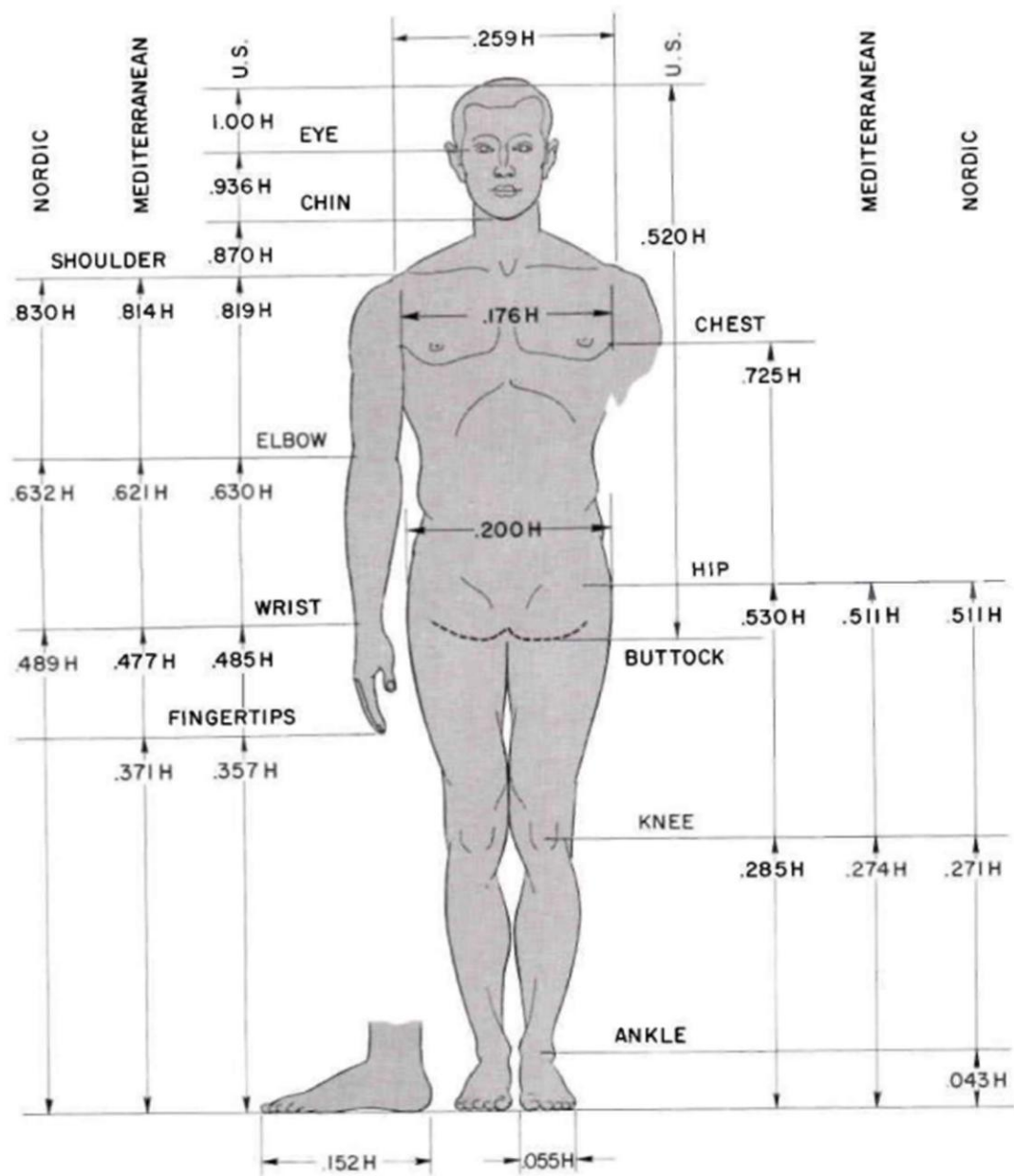


Ilustración 24. Proporciones de los segmentos del cuerpo en hombres [16].

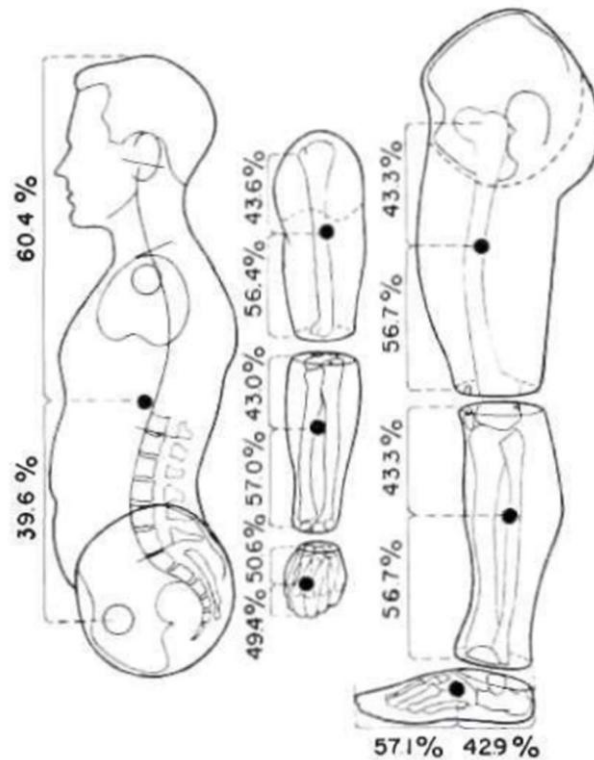


Ilustración 25. Localización del centro de gravedad de los segmentos del cuerpo [16].

Para realizar el estudio y definir los datos antropométricos, se ha tomado como referencia el artículo de Renato Contini et al., *"Body Segment Parameters, Part II"* [16]. En la Ilustración 25 se muestran todos los centros de gravedad existentes en cada parte del cuerpo y las respectivas distancias proximales y distales que definen el segmento.

En el estudio del modelo se debe considerar el centro de gravedad, la masa de cada eslabón y el radio de giro. Todos los valores se miden en función a la distancia del segmento del cuerpo, su masa y la masa total. Para la obtención de los mismos, en la Tabla 5 se muestran todos los segmentos del cuerpo con sus respectivos datos antropométricos, los cuales ofrecen una aproximación estimada a cada segmento en función de variables como la altura o la masa. Cabe destacar que es una estimación basada en experimentos científicos, pues existe la posibilidad que datos que se proporcionan en el artículo sean una aproximación a la longitud real de los segmentos sin ser una adaptación perfecta al sujeto de estudio, además, la morfología propia de cada individuo hace que sea difícil definir unas medidas universales.

TABLE 4.1 Anthropometric Data

Segment	Definition	Segment Weight/Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density
			Proximal	Distal	C of G	Proximal	Distal	
Hand	Wrist axis/knuckle II middle finger	0.006 M	0.506	0.494 P	0.297	0.587	0.577 M	1.16
Forearm	Elbow axis/ulnar styloid	0.016 M	0.430	0.570 P	0.303	0.526	0.647 M	1.13
Upper arm	Glenohumeral axis/elbow axis	0.028 M	0.436	0.564 P	0.322	0.542	0.645 M	1.07
Forearm and hand	Elbow axis/ulnar styloid	0.022 M	0.682	0.318 P	0.468	0.827	0.565 P	1.14
Total arm	Glenohumeral joint/ulnar styloid	0.050 M	0.530	0.470 P	0.368	0.645	0.596 P	1.11
Foot	Lateral malleolus/head metatarsal II	0.0145 M	0.50	0.50 P	0.475	0.690	0.690 P	1.10
Leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.0465 M	0.433	0.567 P	0.302	0.528	0.643 M	1.09
Thigh	Greater trochanter/femoral condyles	0.100 M	0.433	0.567 P	0.323	0.540	0.653 M	1.05
Foot and leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.061 M	0.606	0.394 P	0.416	0.735	0.572 P	1.09
Total leg	Greater trochanter/medial malleolus	0.161 M	0.447	0.553 P	0.326	0.560	0.650 P	1.06
Head and neck	C7-T1 and 1st rib/ear canal	0.081 M	1.000	— PC	0.495	0.116	— PC	1.11
Shoulder mass	Sternoclavicular joint/glenohumeral axis	—	0.712	0.288	—	—	—	1.04
Thorax	C7-T1/T12-L1 and diaphragm*	0.216 PC	0.82	0.18	—	—	—	0.92
Abdomen	T12-L1/L4-L5*	0.139 LC	0.44	0.56	—	—	—	—
Pelvis	L4-L5/greater trochanter*	0.142 LC	0.105	0.895	—	—	—	—
Thorax and abdomen	C7-T1/L4-L5*	0.355 LC	0.63	0.37	—	—	—	—
Abdomen and pelvis	T12-L1/greater trochanter*	0.281 PC	0.27	0.73	—	—	—	1.01
Trunk	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.497 M	0.50	0.50	—	—	—	1.03
Trunk head neck	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.578 MC	0.66	0.34 P	0.503	0.830	0.607 M	—
Head, arms, and trunk (HAT)	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.678 MC	0.626	0.374 PC	0.496	0.798	0.621 PC	—
HAT	Greater trochanter/mid rib	0.678	1.142	—	0.903	1.456	—	—

*NOTE: These segments are presented relative to the length between the greater trochanter and the glenohumeral joint.

Source Codes: M, Dempster via Miller and Nelson; *Biomechanics of Sport*, Lea and Febiger, Philadelphia, 1973. P, Dempster via Plagenhoef; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1971. L, Dempster via Plagenhoef from living subjects; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. C, Calculated.

Tabla 5. Datos antropométricos de los segmentos del cuerpo [16].

Para los datos de partida se requieren unas distancias antropométricas y unos parámetros que se predefinen en este apartado. Se van a representar todos los eslabones en función de los parámetros necesarios para definir la cinemática y dinámica del sistema, entre los cuales se encuentran el centro de gravedad, masa, radio de giro y momento de inercia. Todas las variables están referenciadas según unas constantes de masa, altura y longitud de cada extremidad.

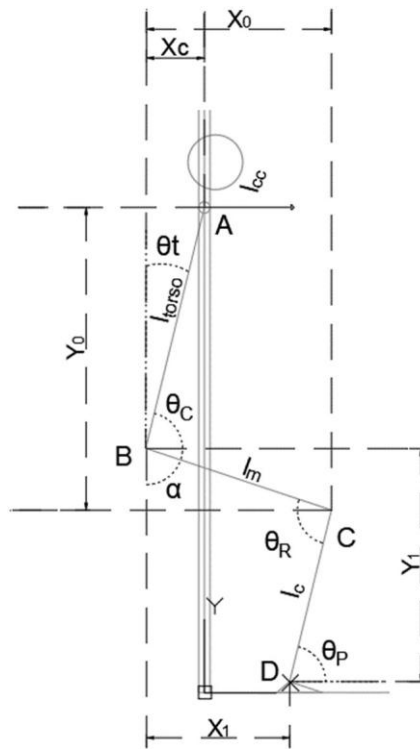


Ilustración 26. Esquema de distancias y ángulos del modelo.

Todas las partes del cuerpo se miden en función de la altura del individuo. Los parámetros antropométricos que se muestran a continuación y que se han representado en la Ilustración 26 han sido obtenidos del artículo de Contini et al. [16].

Longitud del cuello y la cabeza:	$l_{cc} = (1 - 0,814)h = 0,186h$
Longitud del torso:	$l_{torso} = (0,814 - 0,511)h = 0,303h$
Longitud del HAT:	$l_t = l_{cc} + l_{torso} = 0,186h + 0,303h = 0,489h$
Longitud del muslo:	$l_m = (0,511 - 0,274)h = 0,237h$
Longitud de la pierna o caña:	$l_c = (0,274 - 0,043)h = 0,231h$
Longitud total del brazo:	$l_{bt} = (0,814 - 0,371)h = 0,443h$

Tabla 6. Longitudes antropométricas de cada segmento.

Por otro lado, las distancias que se muestran en la Tabla 7 han sido usadas para obtener el modelo definido en el apartado 3.3.1, las cuales han sido obtenidas a partir de los parámetros antropométricos que se muestran en la Tabla 6. Estas son las siguientes:

Apoyo pie: distancia entre el eje vertical de la máquina Smith y el punto donde se apoya el talón. Esta distancia siempre va a ser la misma.	l_{apoyopie}
Altura total: altura total medida en vertical del individuo cuando se encuentra de pie en una posición totalmente perpendicular al suelo.	h
Altura barra: altura sobre la cual se apoya la barra (se considera un apoyo sobre los hombros).	$h_{\text{barra}} = (0,814 - 0,043)h = 0,771h$
Longitud horizontal entre el punto A y B: se trata de la distancia existente entre la coordenada en horizontal donde se sitúa el eje de la barra de la máquina Smith con el punto más alejado del glúteo en el eje horizontal.	$x_c = x_0 - l_{\text{apoyopie}} - \sin\left(\theta_p + \frac{\pi}{2}\right) \cdot l_c$
Longitud horizontal entre el punto B y C: se trata de la distancia existente en el eje horizontal entre los puntos extremos del cuerpo visto en un plano XY.	$x_0 = l_m \cdot \sin(\alpha) = 0,237h \cdot \sin(\alpha)$
Longitud vertical entre punto A y C: se trata de la distancia existente entre el apoyo de la barra en los hombros con la rodilla.	$y_0 = \cos(\theta_t) \cdot l_{\text{HAT}} + \cos(\alpha) \cdot l_m$ $= \cos(\theta_t) \cdot 0,489h + \cos(\alpha) \cdot 0,237h$
Longitud horizontal entre el punto B y D: se trata de la distancia existente entre el tobillo y la distancia más alejada del glúteo en el eje horizontal.	$x_1 = \sin(\alpha) \cdot l_m - \cos(\theta_p) \cdot l_c$ $= \sin(\alpha) \cdot 0,237h - \cos(\theta_p) \cdot 0,231h$
Longitud vertical entre el punto B y D: se trata de la distancia existente en vertical entre la cadera y el tobillo.	$y_1 = \cos(\alpha) \cdot l_m + \sin(\theta_p) \cdot l_c$ $= \cos(\alpha) \cdot 0,237h + \sin(\theta_p) \cdot 0,231h$
Altura: altura total del cuerpo en cada posición. Medida en función de todos los ángulos para considerar la altura en cualquier punto del recorrido.	$h_{\text{posición}} = \cos(\theta_t) \cdot 0,489h + \cos(\alpha) \cdot 0,237h$ $+ \sin(\theta_p) \cdot 0,231h$

Tabla 7. Distancias que definen el modelo de la sentadilla en el problema de posición.

3.2.2 Eslabones

Para definir el modelo, hay que obtener los parámetros de cada uno de los eslabones y, resolver así el problema de posición, cinemático y la dinámico.

		Eslabón		
		Superior (torso)	Medio (muslo)	Inferior (pierna)
Centro de gravedad [m]	Proximal	$lt_p = 0,626 lt$	$lm_p = 0,433 lm$	$lc_p = 0,433 lc$
	Distal	$lt_d = 0,374 lt$	$lm_d = 0,567 lm$	$lc_d = 0,567 lc$
Masa [kg]		$Mt = 0,678 M$	$Mm = (0,1 \cdot 2) M$	$Mc = (0,046 \cdot 2) M$
Radio de giro [m]		$Rt = 0,495 lt$	$Rm = 0,323 lm$	$Rc = 0,302 lc$
Momento de inercia [kg·m ²]		$I_{tcg} = Mt \cdot (Rt)^2$	$I_{mcg} = Mm \cdot (Rm)^2$	$I_{ccg} = Mc \cdot (Rc)^2$

Tabla 8. Tabla de los parámetros antropométricos de cada segmento.

En la Tabla 8 se muestran los parámetros principales que se van a obtener de cada eslabón. El centro de gravedad es necesario para definir las distancias proximales y distales, empleadas en la definición de las velocidades y aceleraciones, así como en el planteamiento del problema de posición. De los datos anteriores, el momento de inercia es el factor más relevante en la modelación del ejercicio, pues las inercias van a tomar un papel muy importante en la ejecución del mismo.

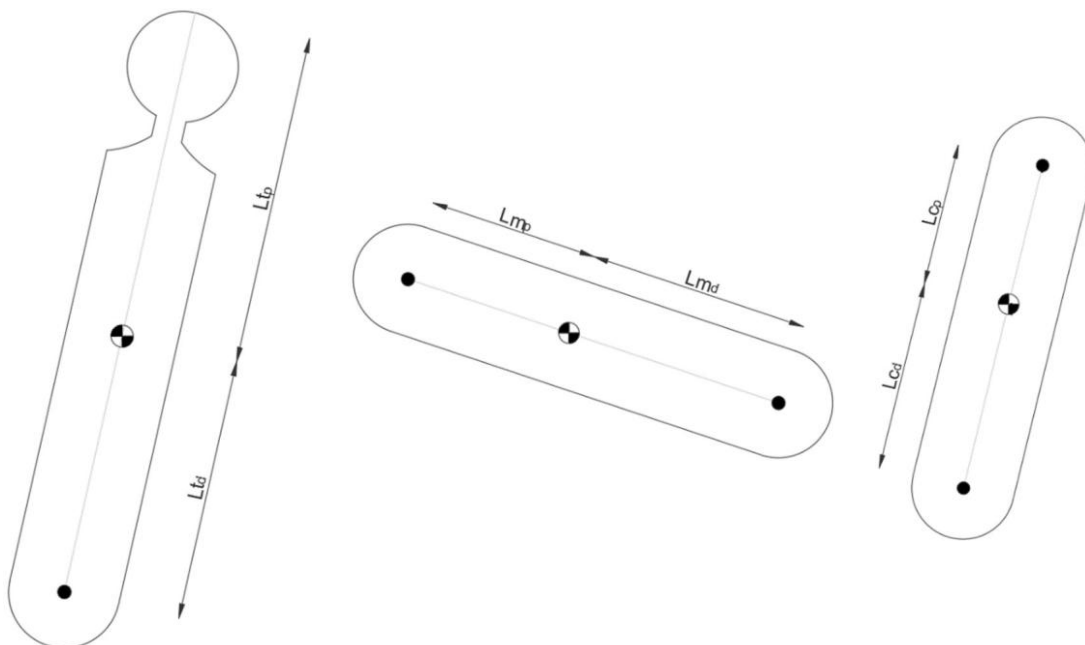


Ilustración 27. Izquierda: eslabón Superior. Centro: eslabón medio. Derecha: eslabón inferior. Las distancias definen los eslabones desde la articulación (punto negro) hasta el centro de gravedad.

En la Ilustración 27 se representan los tres eslabones que definen el modelo de la sentadilla, observándose en cada uno el centro de gravedad y las distancias distales y proximales que lo definen.

3.2.3 Barra

La barra utilizada en el caso del modelo libre es una barra olímpica, cuyo peso según la Real Federación Española de Halterofilia es de 20 kg [19]. La masa añadida a la barra dependerá de las sollicitaciones del sujeto y del ensayo que se quiera realizar.

- **Masa** ($M_{\text{barra}} = 25 \text{ kg}$ para modelo guiado):

$$M_{\text{ba}} = M_{\text{barra}} + M_{\text{añadida}} \text{ [kg]} \quad (12)$$

3.3 Análisis cinemático

3.3.1 Problema de posición

Según el modelo planteado, el cuerpo humano define un conjunto de ángulos en un sistema planar que representa el máximo y mínimo recorrido de una articulación uniendo dos sólidos rígidos como pueden ser, por ejemplo, el muslo y la pierna.

En la realización del ejercicio, existen distintas fases según la posición en la que se encuentre el cuerpo. En primer lugar, la fase excéntrica es donde se inicia el movimiento en estático y va descendiendo hasta llegar al punto más bajo del recorrido. En la primera fase, los músculos están estirados y actúan sujetando el peso que se esté soportando en ese instante. También se conoce como fase negativa. En segundo lugar, la fase isométrica, que se produce en los segundos donde se llega al final del recorrido, con unos ángulos muy pequeños y se produce una sujeción estática del peso total que recae sobre el trapecio. Por último, existe la fase concéntrica, conocida como positiva, donde los músculos se contraen para levantar todo el peso que el cuerpo está soportando.

A continuación, en la Ilustración 28 se muestra la fase excéntrica del movimiento, lo que representa el inicio, frente a una posición isométrica, que se sitúa en la posición más baja del recorrido.

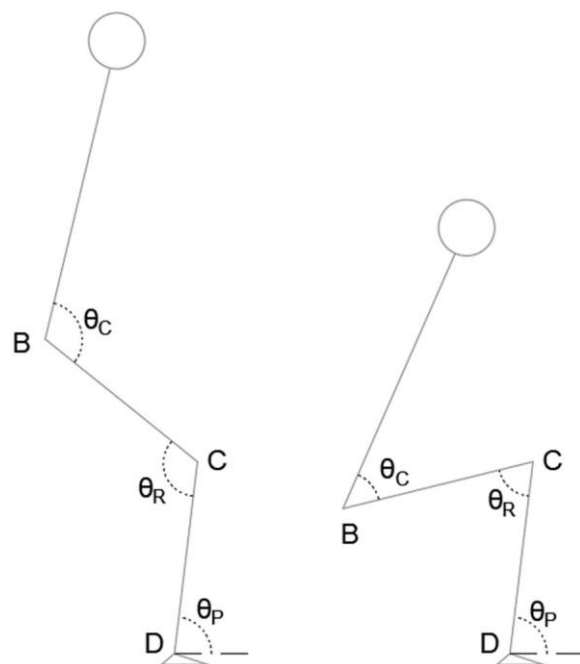


Ilustración 28. Izquierda: Posición excéntrica de inicio; Derecha: Posición isométrica.

Para el modelado matemático que define el ejercicio de la sentadilla se van a definir los ángulos de las principales articulaciones del cuerpo, representados en la Ilustración 29.

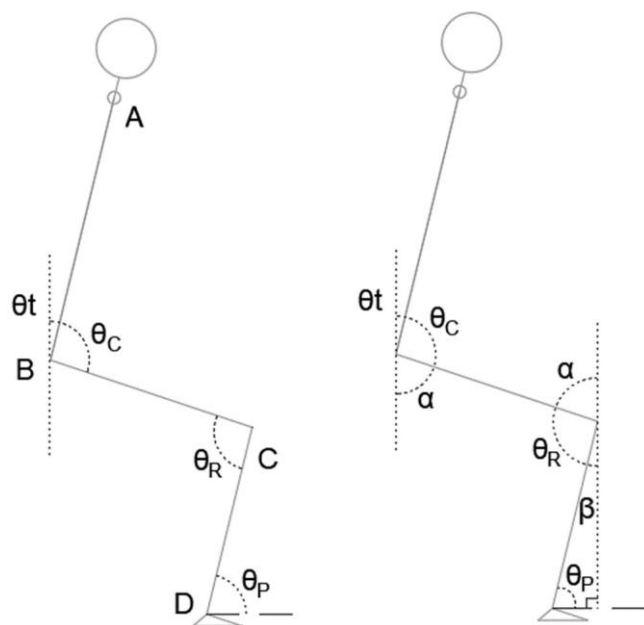


Ilustración 29. Ángulos de las principales articulaciones.

A partir de los ángulos anteriores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \theta_C + \theta_T &= \pi \\ \alpha + \beta + \theta_R &= \pi \\ \beta + \theta_P + \frac{\pi}{2} &= \pi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

El sistema de ecuaciones (13) se trata de un sistema indeterminado, pues existen tres ecuaciones y cinco incógnitas que generan un sistema sin solución. Los ángulos de las articulaciones principales se representan en función del ángulo de rodilla y del tobillo, ya que serán los parámetros que van a ser medidos experimentalmente junto con la altura conocida de la persona.

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\pi}{2} - \theta_P \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \\ \theta_T + \theta_C + \theta_P - \theta_R &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Como los ángulos van en función de θ_R y θ_P , hay que añadir una ecuación al sistema de ecuaciones (14), pues será la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \theta_C &= \frac{\pi}{2} + \theta_R - \theta_P - \theta_T \\ \theta_T &= \frac{\pi}{2} + \theta_R - \theta_P - \theta_C \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$h_{\text{posición}} = \cos(\theta_T) \cdot 0.489h + \cos(\alpha) \cdot 0.237h + \sin(\theta_P) \cdot 0.231h$$

A continuación, se obtienen los valores de todos los ángulos que van a definir el movimiento del ejercicio. A partir de los ángulos que se definen a continuación, se obtendrán los pares en cada articulación.

3.3.1.1 Ángulo de cadera

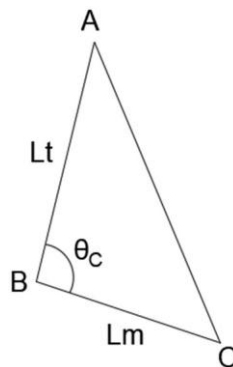


Ilustración 30. Triángulo resultante de la unión del torso y el muslo.

Para obtener el ángulo que forma el muslo con la cadera se aplica el teorema del coseno y los principios de trigonometría según el teorema de Pitágoras. Mediante un sistema de ecuaciones uniendo los conceptos anteriores se obtiene el valor resultante del ángulo en función de los parámetros indicados.

$$\begin{aligned} \overline{A} \overline{C}^2 &= l_t^2 + l_m^2 - 2 l_t l_m \cos(\theta_c) \\ \overline{A} \overline{C}^2 &= y^2 + (x_0 - x_c)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{y_0^2 + (x_0 - x_c)^2 - l_t^2 - l_m^2}{-2 l_t l_m} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{y_0^2 + (x_0 - x_c)^2 - 0.03564 h^2}{-0.143622 h^2} \right) \quad (17)$$

3.3.1.2 Ángulo de rodilla

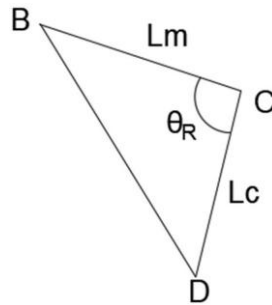


Ilustración 31. Triangulo resultante de la unión de la cadera y el tobillo.

Para obtener el ángulo que forma el muslo con la pierna, se aplicarán los mismos métodos de cálculo empleados en el ángulo anterior. De la misma manera, con un sistema de ecuaciones que define ambos teoremas se obtiene el ángulo resultante en función de los parámetros necesarios para su obtención.

$$\begin{aligned} \overline{B} \overline{D}^2 &= l_m^2 + l_c^2 - 2 l_m l_c \cos(\theta_R) \\ \overline{B} \overline{D}^2 &= x_1^2 + y_1^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\theta_R = \cos^{-1} \left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - l_m^2 - l_c^2}{-2 l_m l_c} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - 0.1095 h^2}{-0.10949 h^2} \right) \quad (19)$$

3.3.1.3 Ángulo de tronco

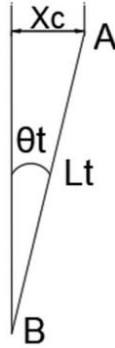


Ilustración 32. Triángulo resultante de una vertical desde la cadera hasta la altura del cuello.

Para la obtención del ángulo del tronco, se realiza el principio de Pitágoras, sin ser necesario el teorema del coseno.

$$l_t^2 = x_c^2 + (l_t \cdot \cos \theta_t)^2 \quad (20)$$

Realizando una sustitución y aislando la ecuación (20) se obtiene el resultado del ángulo del torso en función de parámetros definidos anteriormente.

$$\theta_t = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{0.0918h^2 - x_c^2}}{0.303h} \right) \quad (21)$$

3.3.1.4 Ángulo de pie

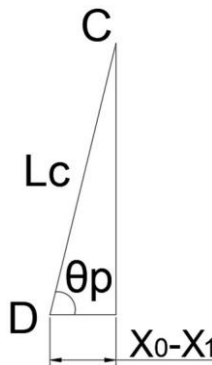


Ilustración 33. Triángulo resultante de una vertical desde la rodilla hasta la altura del tobillo.

Al igual que en el punto anterior de cálculo del ángulo del torso, en este caso para el ángulo del pie con la pierna, también se va a emplear únicamente el teorema de Pitágoras.

$$l_c^2 = (x_0 - x_1)^2 + (l_c \cdot \sin \theta_p)^2 \quad (22)$$

Realizando una sustitución y aislando la ecuación (22), se obtiene el resultado del ángulo en función de los parámetros definidos anteriormente.

$$\theta_p = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{0.05336h^2 - (x_0 - x_1)^2}}{0.231h} \right) \quad (23)$$

3.3.1.5 Ángulos en función de variables

Obtenidos los ángulos, el ángulo de la cadera (θ_C) se representa en función del ángulo de rodilla (θ_R) y del ángulo del tobillo (θ_P).

$$\left. \begin{aligned} \theta_C &= \frac{\pi}{2} + \theta_R - \theta_P - \theta_T \\ \theta_T &= \frac{\pi}{2} + \theta_R - \theta_P - \theta_C \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Estos ángulos dependen directamente de variables de distancia horizontal, que se van a representar en función de la altura (h), θ_R y θ_P . Dichas variables son las siguientes:

$$\alpha = \pi - \theta_c - \theta_t \quad (25)$$

$$x_0 = \sin(\alpha) \cdot 0.237h \quad (26)$$

$$x_0 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \right) \cdot 0.237h \quad (27)$$

$$x_1 = x_0 - \cos(\theta_P) \cdot l_c \quad (28)$$

$$x_1 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \right) \cdot 0.237h - \cos(\theta_P) \cdot 0.231h \quad (29)$$

$$x_c = x_0 - l_{apoyopie} + \cos(\theta_P) \cdot 0.231h \quad (30)$$

$$x_c = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \right) \cdot 0.237h - x - \cos(\theta_P) \cdot 0.231h \quad (31)$$

Resumen:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \right) \cdot 0.237h \\ x_1 &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \right) \cdot 0.237h - \cos(\theta_P) \cdot 0.231h \\ x_c &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_R + \theta_P \right) \cdot 0.237h - x - \cos(\theta_P) \cdot 0.231h \end{aligned} \right) \quad (32)$$

- **Ángulo de cadera (θ_c)**

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} + \theta_R - \theta_P - \theta_T \quad (33)$$

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} + \theta_R - \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{0.05336h^2 - (x_0 - x_1)^2}}{0.231h} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{0.0918h^2 - x_c^2}}{0.303h} \right) \quad (34)$$

3.3.1.6 Posición de cada articulación

Según el cálculo del modelo por el método de los eslabones, usado anteriormente para el cálculo de longitudes y ángulos, se pueden obtener las posiciones de cada articulación en función del ángulo.

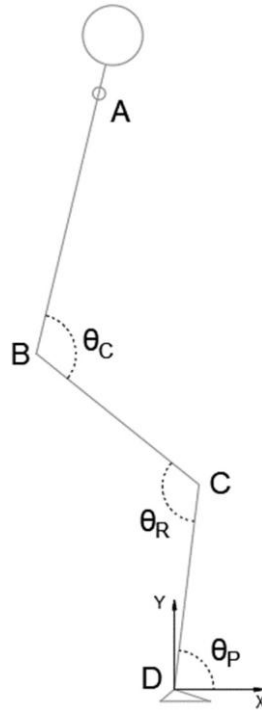


Ilustración 34. Representación del modelo con el origen del sistema de referencia.

A continuación, se definen las ecuaciones que describen la posición de cada articulación en función del ángulo, es decir, en función de la posición en la que se encuentre el cuerpo. Estos valores van a ser dependientes del tiempo, pues en el modelo se considera el tiempo y los ángulos como variables esenciales para el conocimiento de la posición de la articulación de la rodilla, cadera y barra para su posterior cálculo dinámico.

$$x_D = 0 \quad (35)$$

$$y_D = 0 \quad (36)$$

$$x_C = x_D + L_c \cdot \cos(\theta_P) \quad (37)$$

$$y_C = y_D + L_c \cdot \sin(\theta_P) \quad (38)$$

$$x_B = x_C + L_m \cdot \cos(\theta_R) \quad (39)$$

$$y_B = y_C + L_m \cdot \sin(\theta_R) \quad (40)$$

$$x_A = x_B + L_t \cdot \cos(\theta_T) \quad (41)$$

$$y_A = y_B + L_t \cdot \sin(\theta_T) \quad (42)$$

3.3.2 Velocidad y aceleración de los sólidos rígidos

A continuación, se procede a obtener la velocidad y aceleración de los centros de gravedad de todas las partes del cuerpo mediante las ecuaciones cinemáticas que definen un sólido rígido. Estas ecuaciones del movimiento van a definir el comportamiento del mecanismo completo en una posición e instante de tiempo conocidos. En la Ilustración 35 se muestran todos los parámetros que se consideran y son de mayor importancia para definir la cinemática de este sistema.

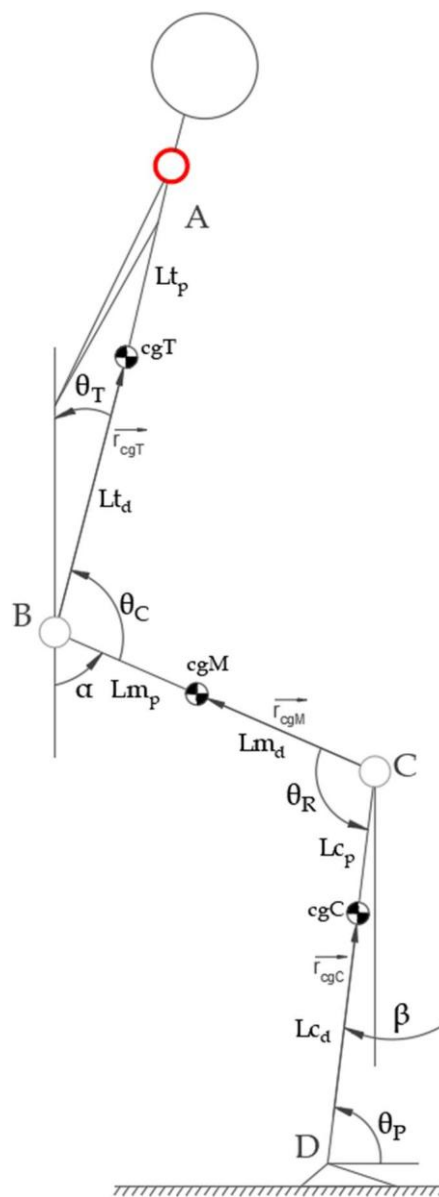


Ilustración 35. Vectores y centros de gravedad de los segmentos que definen el cuerpo.

3.3.2.1 Velocidad y aceleración de la pierna

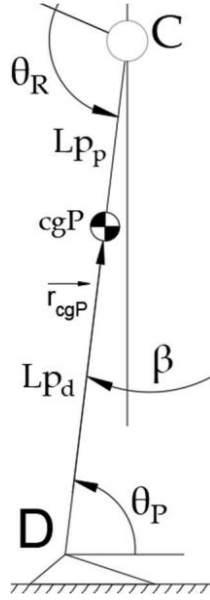


Ilustración 36. Eslabón de la pierna.

Para la obtención de la velocidad lineal en el centro de gravedad de la parte inferior del cuerpo, la pierna, se tiene un apoyo fijo, por lo cual, no se considera velocidad lineal en el tobillo ($\vec{v}_{c \rightarrow}$), únicamente se tendrá en cuenta la velocidad angular de dicho eslabón ($\vec{\omega}_{c \rightarrow}$).

$$\vec{v}_{cgC \rightarrow} = \vec{v}_{c \rightarrow} + \vec{\omega}_{c \rightarrow} \times \vec{r}_{DcgP \rightarrow} \quad (43)$$

$$\vec{v}_{c \rightarrow} = 0 \quad (44)$$

$$\vec{\omega}_{c \rightarrow} = \dot{\theta}_p \hat{k} \quad (45)$$

$$\vec{r}_{D \rightarrow cg \rightarrow C \rightarrow} = L_{cd} \cdot \cos(\theta_p) \hat{i} + L_{cd} \cdot \sin(\theta_p) \hat{j} \quad (46)$$

Por tanto,

$$\vec{v}_{cgC \rightarrow} = \dot{\theta}_p \hat{k} \times (L_{cd} \cdot \sin(\theta_p) \hat{i} + L_{cd} \cdot \cos(\theta_p) \hat{j}) \quad (47)$$

$$\vec{v}_{cgC \rightarrow} = L_{cd} \cdot \dot{\theta}_p \cdot (-\sin(\theta_p) \hat{i} + \cos(\theta_p) \hat{j}) \quad (48)$$

Se obtienen las componentes de ambos ejes, X e Y:

$$\begin{bmatrix} v_{cgCx} \\ v_{cgCy} \end{bmatrix} = L_{cd} \cdot \dot{\theta}_p \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta_p) \\ \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (49)$$

Para la obtención de la aceleración, únicamente se tendrán en cuenta la aceleración y velocidad angular de dicho eslabón ($\vec{\omega}_{c \rightarrow}$, $\vec{\omega}_{c \rightarrow}$).

$$\vec{a}_{cgC} = \vec{a}_C + \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{DcgC} + \vec{\omega}_C \times (\vec{\omega}_C \times \vec{r}_{DcgC}) \quad (50)$$

$$\vec{a}_C = 0 \quad (51)$$

$$\vec{\omega}_C = \dot{\theta}_p \hat{k} \quad (52)$$

$$\vec{\omega}_C = \ddot{\theta}_p \hat{k} \quad (53)$$

$$\vec{r}_{DcgC} = L_{cd} \cdot \cos(\theta_p) \hat{i} + L_{cd} \cdot \sin(\theta_p) \hat{j} \quad (54)$$

Por tanto,

$$\vec{a}_{cgC} = \ddot{\theta}_p \hat{k} \times ((L_{cd} \cdot \cos(\theta_p) \hat{i} + L_{cd} \cdot \sin(\theta_p) \hat{j})) + \dot{\theta}_p \hat{k} \times [\dot{\theta}_p \hat{k} \times (L_{cd} \cdot \cos(\theta_p) \hat{i} + L_{cd} \cdot \sin(\theta_p) \hat{j})] \quad (55)$$

Se obtienen las componentes de ambos ejes, X e Y:

$$\begin{bmatrix} a_{cgCx} \\ a_{cgCy} \end{bmatrix} = L_{cd} \cdot \ddot{\theta}_p \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta_p) \\ \cos(\theta_p) \end{bmatrix} - L_{cd} \cdot \dot{\theta}_p^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \\ \sin(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (56)$$

3.3.2.2 Velocidad y aceleración del muslo

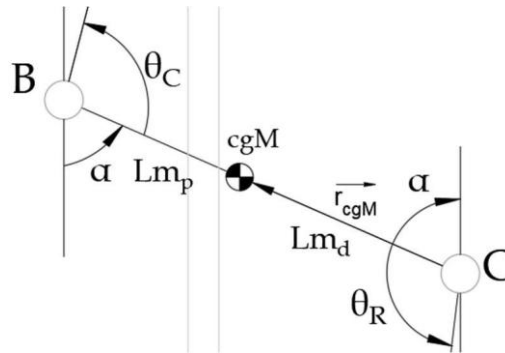


Ilustración 37. Eslabón del muslo.

Para el cálculo de la velocidad en el eslabón del muslo se requiere la velocidad angular del sólido rígido ($\vec{\omega}_M$) y la velocidad lineal del punto C ($\vec{v}_C$), correspondiente a la rodilla, que se representará según las direcciones en el eje X e Y.

$$\vec{v}_{cgM} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_M \times \vec{r}_{cgM} \quad (57)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{Cx} \hat{i} + \vec{v}_{Cy} \hat{j} = L_c \cdot \dot{\theta}_p \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta_p) \\ \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\vec{\omega}_M = \dot{\alpha} \hat{k} \quad (59)$$

$$\vec{r}_{cgM} = L_{md} \cdot \cos(\alpha) \hat{i} + L_{md} \cdot \sin(\alpha) \hat{j} \quad (60)$$

$$\vec{v}_{cgM} = \vec{v}_{Cx} \hat{i} + \vec{v}_{Cy} \hat{j} + \dot{\theta}_R k^\wedge \times (Lm_d \cdot \cos(\alpha) \hat{j} + Lm_d \cdot \sin(\alpha) \hat{i}) \quad (61)$$

Considerando los ejes X e Y, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_{cgMx} \\ v_{cgMy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} + Lm_d \cdot \dot{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (62)$$

Para el cálculo de la aceleración se requiere la aceleración y velocidad angular del sólido rígido ($\vec{W}_M$, $\vec{W}_M$) y la aceleración lineal de la rodilla ($\vec{a}_C$), que se representará según las direcciones en el eje X e Y.

$$\vec{a}_{cgM} = \vec{a}_C + \vec{W}_M \times \vec{r}_{cgM} + \vec{W}_M \times (\vec{W}_M \times \vec{r}_{cgM}) \quad (63)$$

$$\vec{a}_C = \begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lc \cdot \ddot{\theta}_P \cdot \left[\frac{-\sin(\theta_p)}{\cos(\theta_p)} \right] - Lc \cdot \dot{\theta}_P^2 \cdot \left[\frac{\cos(\theta_p)}{\sin(\theta_p)} \right] \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\vec{W}_M = \dot{\alpha} k^\wedge \quad (65)$$

$$\vec{W}_M = \dot{\alpha} k^\wedge \quad (66)$$

$$\vec{r}_{DcgM} = Lm_d \cdot \cos(\alpha) \hat{j} + Lm_d \cdot \sin(\alpha) \hat{i} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cgM} = & \vec{a}_{Cx} \hat{i} + \vec{a}_{Cy} \hat{j} + \dot{\alpha} k^\wedge \times (Lm_d \cdot \cos(\alpha) \hat{j} + Lm_d \cdot \sin(\alpha) \hat{i}) \\ & + \dot{\alpha} k^\wedge \times [\dot{\alpha} k^\wedge \times (Lm_d \cdot \cos(\alpha) \hat{j} + Lm_d \cdot \sin(\alpha) \hat{i})] \end{aligned} \quad (68)$$

Considerando los ejes X e Y, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{cgMx} \\ a_{cgMy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} + Lm_d \cdot \ddot{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} - Lm_d \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (69)$$

3.3.2.3 Velocidad y aceleración del torso

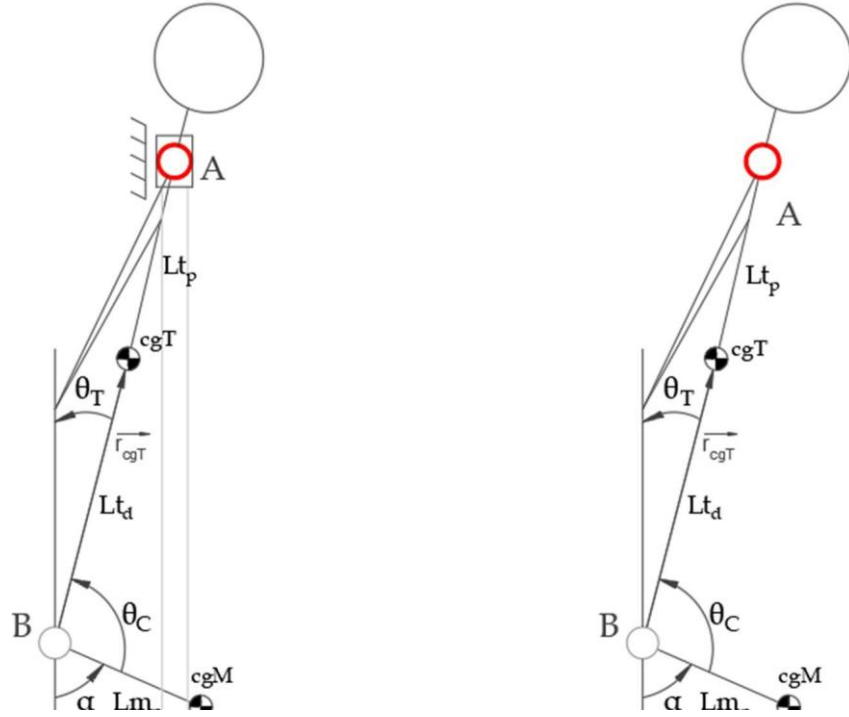


Ilustración 38. Eslabón del torso.

El estudio cinemático del sólido rígido del torso se realiza de la misma manera para el movimiento guiado que en movimiento libre. Para el cálculo de la velocidad en este eslabón se requiere la velocidad angular del sólido rígido ($\vec{\omega}_T$) y la velocidad lineal del punto B ($\vec{v}_B$), que se representará según las direcciones en el eje X e Y.

$$\vec{v}_{cgT} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_T \times \vec{r}_{cgT} \quad (70)$$

$$\vec{v}_B = v_{Bx} \hat{i} + v_{By} \hat{j} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = Lm \cdot \dot{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\vec{\omega}_T = \dot{\theta}_T \hat{k} \quad (72)$$

$$\vec{r}_{cgT} = Lt_d \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt_d \cdot \sin(\theta_T) \hat{j} \quad (73)$$

$$\vec{v}_{cgT} = v_{Bx} \hat{i} + v_{By} \hat{j} + \dot{\theta}_T \hat{k} \times (Lt_d \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt_d \cdot \sin(\theta_T) \hat{j}) \quad (74)$$

Considerando ambos ejes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_{cgTx} \\ v_{cgTy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} + Lm \cdot \dot{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (75)$$

Para el cálculo de la aceleración en este segmento se requiere la aceleración lineal del punto B ($\vec{a}_{B \rightarrow}$) y la aceleración y velocidad angular del sólido ($\vec{w}_{T \rightarrow}$, $\dot{\vec{w}}_{T \rightarrow}$), que posteriormente, se representará según las direcciones en el eje X e Y.

$$\vec{a}_{gT \rightarrow} = \vec{a}_{B \rightarrow} + \vec{w}_{T \rightarrow} \times \vec{r}_{gT \rightarrow} + \dot{\vec{w}}_{T \rightarrow} \times (\vec{w}_{T \rightarrow} \times \vec{r}_{gT \rightarrow}) \quad (76)$$

$$\vec{a}_{B \rightarrow} = \vec{a}_{Bx \rightarrow} \hat{i} + \vec{a}_{By \rightarrow} \hat{j} = \begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} + Lm \cdot \alpha'' \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} + Lm \cdot \alpha'^2 \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\vec{w}_{T \rightarrow} = \dot{\theta}_T k^{\wedge} \quad (78)$$

$$\dot{\vec{w}}_{T \rightarrow} = \ddot{\theta}_T k^{\wedge} \quad (79)$$

$$\vec{r}_{DcgT \rightarrow} = Lt_d \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt_d \cdot \sin(\theta_T) \hat{j} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cgT \rightarrow} = \vec{a}_{Bx \rightarrow} \hat{i} + \vec{a}_{By \rightarrow} \hat{j} + \ddot{\theta}_T k^{\wedge} \times (Lt_d \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt_d \cdot \sin(\theta_T) \hat{j}) \\ + \dot{\theta}_T k^{\wedge} \times [\dot{\theta}_T k^{\wedge} \times (Lt_d \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt_d \cdot \sin(\theta_T) \hat{j})] \end{aligned} \quad (81)$$

Considerando los ejes X e Y, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{cgTx} \\ a_{cgTz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{Bz} \end{bmatrix} + Lt_d \cdot \ddot{\theta}_T \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\theta_T) \\ \sin(\theta_T) \end{bmatrix} - Lt_d \cdot \dot{\theta}_T^2 \cdot \begin{bmatrix} \sin(\theta_T) \\ \cos(\theta_T) \end{bmatrix} \quad (82)$$

3.3.2.4 Velocidad y aceleración de la barra

El movimiento del sólido que se carga sobre los hombros en el ejercicio de la sentadilla va a ser guiado o libre, pero en ambos casos va a existir una aceleración propia de la barra en su centro de gravedad. El procedimiento de cálculo se va a considerar también desde el punto B, como se muestra en la Ilustración 38, que es el punto en el que se conocen las aceleraciones y velocidades. La única diferencia existente en el cálculo respecto al centro de gravedad del torso es la distancia, pues en el torso se considera la distancia distal al centro de gravedad mientras que en esta se considera la distancia del torso.

$$\vec{v}_{cgBarra \rightarrow} = \vec{v}_{B \rightarrow} + \vec{w}_{B \rightarrow} \times \vec{r}_{gT \rightarrow} \quad (83)$$

$$\vec{v}_{B \rightarrow} = \vec{v}_{Bx \rightarrow} \hat{i} + \vec{v}_{By \rightarrow} \hat{j} = \begin{bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix} + Lm \cdot \alpha' \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\vec{w}_{Barra \rightarrow} = \dot{\theta}_T k^{\wedge} \quad (85)$$

$$\vec{r}_{cgT \rightarrow} = Lt \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt \cdot \sin(\theta_T) \hat{j} \quad (86)$$

$$\vec{v}_{cgBarra \rightarrow} = \vec{v}_{Bx \rightarrow} \hat{i} + \vec{v}_{By \rightarrow} \hat{j} + \dot{\theta}_T k^{\wedge} \times (Lt \cdot \cos(\theta_T) \hat{i} + Lt \cdot \sin(\theta_T) \hat{j}) \quad (87)$$

Considerando ambos ejes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_{cgBarrax} \\ v_{cgBarray} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} + L \cdot \dot{\theta}_T \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (88)$$

Para el cálculo de la aceleración en la barra se requiere la aceleración lineal del punto B ($\vec{a}^{\text{B}}$) y la aceleración y velocidad angular del sólido ($\vec{W}^{\text{T}}$, $\dot{\theta}^{\text{T}}$), que posteriormente, se representará según las direcciones en el eje X y Z.

$$\vec{a}_{cgBarrax} = \vec{a}_B + \vec{W}^{\text{T}} \times \vec{r}_{cgT} + \dot{\theta}^{\text{T}} \times (\vec{W}^{\text{T}} \times \vec{r}_{cgT}) \quad (89)$$

$$\vec{a}^{\text{B}} = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \end{bmatrix} + L \cdot \ddot{\theta}_R \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\theta_R) \\ \sin(\theta_R) \end{bmatrix} + L \cdot \dot{\theta}_R^2 \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta_R) \\ \cos(\theta_R) \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$\vec{W}_{Barrax} = \dot{\theta}_T \hat{k} \quad (91)$$

$$\vec{W}_{Barray} = \dot{\theta}_T \hat{k} \quad (92)$$

$$\vec{r}_{DcgBarray} = L \cdot \cos(\theta_T) \hat{j} + L \cdot \sin(\theta_T) \hat{i} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cgBarray} = & \vec{a}_{Bx} \hat{i} + \vec{a}_{By} \hat{j} + \dot{\theta}_T \hat{k} \times (L \cdot \cos(\theta_T) \hat{j} + L \cdot \sin(\theta_T) \hat{i}) \\ & + \dot{\theta}_T \hat{k} \times [\dot{\theta}_T \hat{k} \times (L \cdot \cos(\theta_T) \hat{j} + L \cdot \sin(\theta_T) \hat{i})] \end{aligned} \quad (94)$$

Considerando los ejes X e Y, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{cgBarrax} \\ a_{cgBarray} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{Bz} \end{bmatrix} + L \cdot \ddot{\theta}_T \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\theta_T) \\ \sin(\theta_T) \end{bmatrix} - L \cdot \dot{\theta}_T^2 \cdot \begin{bmatrix} \sin(\theta_T) \\ \cos(\theta_T) \end{bmatrix} \quad (95)$$

Una vez establecidas todas las ecuaciones que definen la velocidad y aceleración de todos los sólidos rígidos, introduciendo los valores de los ángulos en cada instante de tiempo se puede resolver el problema de velocidad y aceleración en la fase excéntrica de la sentadilla.

3.4 Análisis dinámico

3.4.1 Modelo guiado

El esquema que define el modelo guiado se representa en la Ilustración 39, donde se muestran todas las fuerzas de reacción, fuerzas de inercia, pares cinemáticos, masas y aceleraciones que se ven involucradas en el movimiento.

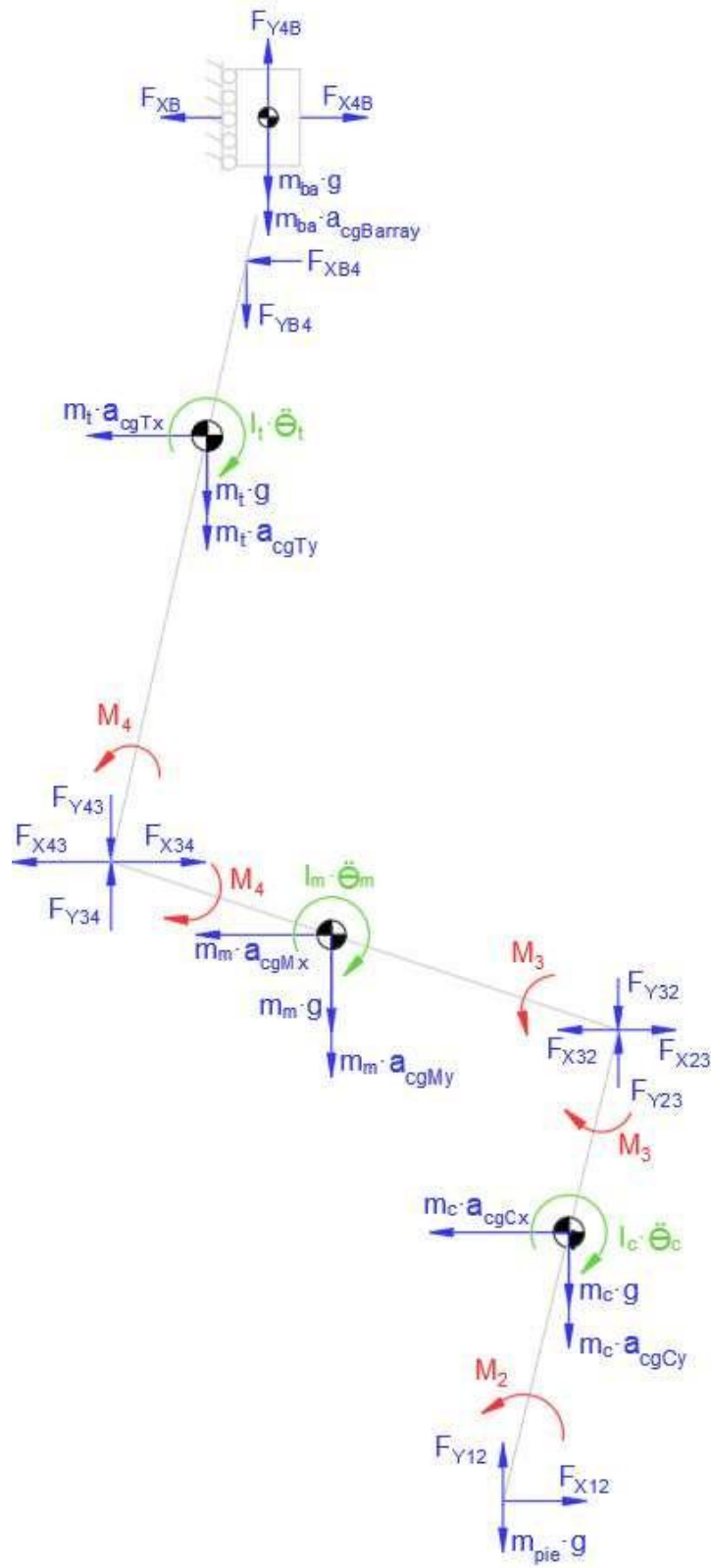


Ilustración 39. Modelo del sistema guiado.

3.4.1.1 Equilibrio de fuerzas estático en el eslabón de la pierna para el modelo guiado

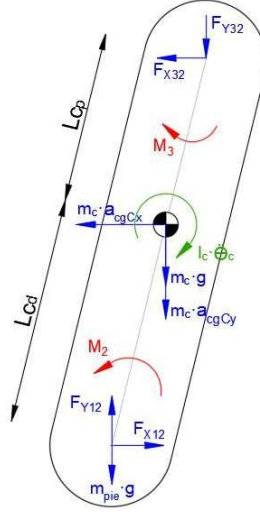


Ilustración 40. Análisis de equilibrio estático en la pierna.

En la Ilustración 40 se representa el sólido rígido de la pierna y todas las fuerzas que actúan sobre la misma. Los momentos representados son los momentos de la rodilla y de la cadera, M_3 y M_2 respectivamente.

Realizando un equilibrio estático en la dirección horizontal y vertical se obtienen las siguientes ecuaciones que definen las fuerzas del sistema:

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{X32} = m_c \cdot a_{cgCx} + F_{X12} \quad (96)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{Y12} - F_{F32} = m_c \cdot a_{cgCy} + m_c \cdot g + m_{pie} \cdot g \quad (97)$$

La fuerza F_{X12} va a ser conocida, pues en el modelo de la sentidilla guiada se van a emplear plataformas de medición de fuerza triaxial, permitiendo obtener las reacciones en los apoyos de los pies.

El equilibrio de momentos se realiza desde el centro de gravedad del eslabón. El criterio de signos empleado es antihorario positivo y horario negativo.

$$\begin{aligned} \Sigma M_{cdg} = 0 \rightarrow & -F_{Y12} \cdot L_{cd} \cdot \cos \theta_p - F_{F32} \cdot L_{cp} \cdot \cos \theta_p + F_{X32} \cdot L_{cp} \cdot \sin \theta_p + M_2 \\ & - M_3 = I_c \cdot \ddot{\theta}_c - F_{X12} \cdot L_{cd} \cdot \sin \theta_p \end{aligned} \quad (98)$$

3.4.1.2 Equilibrio de fuerzas estático en el eslabón del muslo para el modelo guiado

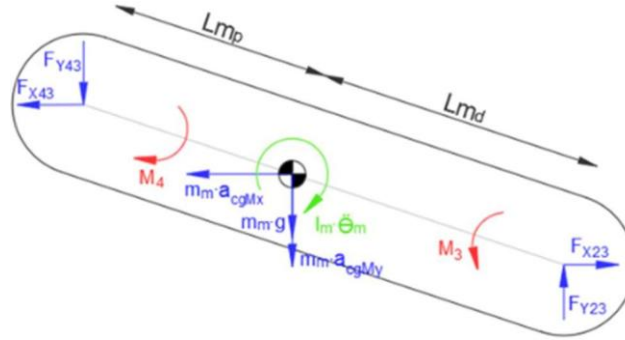


Ilustración 41. Análisis de equilibrio estático en el muslo.

En la Ilustración 41 se representan todas las fuerzas, aceleraciones y momentos que afectan al sólido rígido del muslo. Los momentos que se observan son los momentos de la rodilla y de la cadera, M_3 y M_4 respectivamente.

Realizando el equilibrio estático en el eje horizontal y vertical, x y y respectivamente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{X23} - F_{X43} = m_m \cdot a_{cgMx} \quad (99)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{Y23} + F_{Y43} = m_m \cdot a_{cgMy} + m_m \cdot g \quad (100)$$

El equilibrio de momentos, como en el eslabón anterior, se realiza desde el centro de gravedad del eslabón.

$$\Sigma M_{cdg} = 0 \rightarrow F_{X23} \cdot Lm_d \cdot \cos(\alpha) + F_{Y23} \cdot Lm_d \cdot \sin(\alpha) + F_{X43} \cdot Lm_p \cdot \sin(\alpha) + F_{Y43} \cdot Lm_p \cdot \cos(\alpha) + M_3 - M_4 = I_m \cdot \ddot{\theta}_m \quad (101)$$

3.4.1.3 Equilibrio de fuerzas estático en el eslabón del torso para el modelo guiado

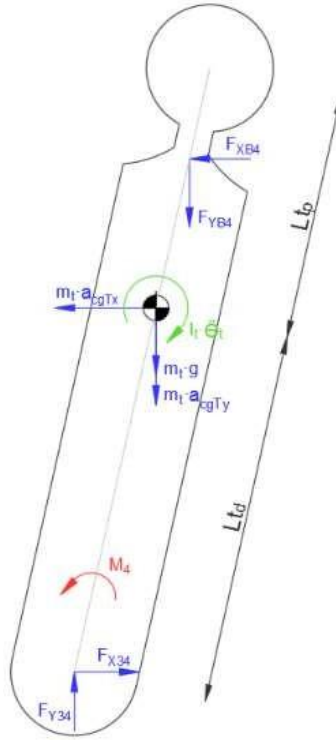


Ilustración 42. Análisis de equilibrio estático en el torso.

En la Ilustración 42 se representan toda la dinámica que afecta al sólido rígido del torso. En este sólido rígido la fuerza F_{XB4} va a ser la misma fuerza de reacción que aparece en la deslizadera (F_{XB} , representada en la Ilustración 39), pues es la fuerza que la barra ejerce contra la guía para evitar que se desplace en el eje horizontal y permitir únicamente el movimiento en el eje vertical, a diferencia del modelo libre, que esa fuerza es inexistente.

Al igual que en los sólidos rígidos analizados anteriormente, realizando el equilibrio estático en el eje horizontal y vertical, x e y respectivamente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{X34} - F_{XB4} = m_t \cdot a_{cgTx} \quad (102)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{Y34} = F_{YB4} + m_t \cdot a_{cgTy} + m_t \cdot g \quad (103)$$

El equilibrio de momentos, como en el muslo, se realiza desde el centro de gravedad del sólido rígido. El par M_4 es el generado por la cadera, igual que en el eslabón anterior.

$$\begin{aligned} \Sigma M_{cdg} = 0 \rightarrow & -F_{Y34} \cdot Lt_d \cdot \sin \theta_t + F_{X34} \cdot Lt_d \cdot \cos \theta_t + F_{XB} \cdot Lt_p \cdot \cos \theta_t + M_4 \\ & = I_T \cdot \ddot{\theta}_T + m_{ba} \cdot a_{cgBarray} \cdot Lt_p \cdot \sin \theta_t + m_{ba} \cdot g \cdot Lt_p \cdot \sin \theta_t \end{aligned} \quad (104)$$

Donde,

$$F_{XB4} = F_{XB} \quad (105)$$

3.4.1.4 Equilibrio de fuerzas estático en la barra para el modelo guiado

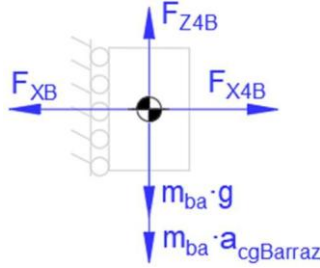


Ilustración 43. Análisis de equilibrio estático en la barra para modelo guiado.

Para el análisis de la deslizadera, representada en la Ilustración 43, se realiza también un equilibrio estático en el eje vertical y horizontal, del cual se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{X4B} = F_{XB} \quad (106)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{Y4B} = m_{ba} \cdot a_{cgBarraz} + m_{ba} \cdot g \quad (107)$$

Donde $\theta''_{cgBarraz}$ es la aceleración lineal de la barra deslizadera apoyada en los hombros.

El modelo que define la dinámica del ejercicio guiado se define con nueve ecuaciones y nueve incógnitas. Al tener el mismo número de incógnitas que de ecuaciones es un sistema determinado, por lo cual se puede obtener un resultado sin la necesidad de añadir ecuaciones adicionales.

Reescribiendo en forma de matriz, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot x = b \quad (108)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_{cd} \cdot B & L_{cp} \cdot A & -L_{cp} \cdot B & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{md} \cdot C & L_{md} \cdot D & L_{mp} \cdot C & L_{mp} \cdot D & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{td} \cdot F & -L_{td} \cdot E & (L_{torso} - L_{td}) \cdot F & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$A = \sin \theta_p; B = \cos \theta_p; C = \cos(\alpha); D = \sin(\alpha); E = \sin \theta_t; F = \cos \theta_t \quad (110)$$

$$x = \begin{bmatrix} F_{F12} \\ F_{X23} \\ F_{F23} \\ F_{X34} \\ F_{F34} \\ F_{XB} \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$b = \begin{bmatrix} m_c \cdot a_{cgCy} + m_c \cdot g + m_{pie} \cdot g \\ m_c \cdot a_{cgCx} + F_{X12} \\ I_c \cdot \ddot{\theta}_c - F_{X12} \cdot L_{Cd} \cdot \sin \theta_p \\ m_m \cdot a_{cgMx} \\ m_m \cdot a_{cgMy} + m_m \cdot g \\ I_m \cdot \ddot{\theta}_m \\ m_t \cdot a_{cgTx} \\ F_{YB4} + m_t \cdot a_{cgTy} + m_t \cdot g \\ L I_t \cdot \ddot{\theta}_t + F_{FB4} \cdot L t_p \cdot \sin \theta_t + F_{XB4} \cdot (L_{torso} - L t_d) \cdot \cos \theta_t \end{bmatrix} \quad (112)$$

A continuación, realizando la cinemática inversa de matrices se obtienen los valores de las fuerzas y momentos. La ecuación que define la cinemática inversa es la siguiente:

$$x = A^{-1} \cdot b \quad (113)$$

Se obtienen así, las fuerzas y pares a lo largo del movimiento de la sentadilla en la máquina Smith.

3.4.2 Modelo libre

La Ilustración 44 define el modelo libre para el ejercicio de la sentadilla, donde se muestran todas las fuerzas de reacción, fuerzas de inercia, pares cinemáticos, masas y aceleraciones que se ven involucradas en el movimiento. En este modelo se va a trabajar con una barra libre la cual ejerce unas fuerzas distintas a las del modelo guiado, pues se trata de un modelo con un grado de libertad más, lo que hace que sea inexistente la fuerza de sujeción en el plano horizontal, permitiendo el movimiento de la misma en ese eje.

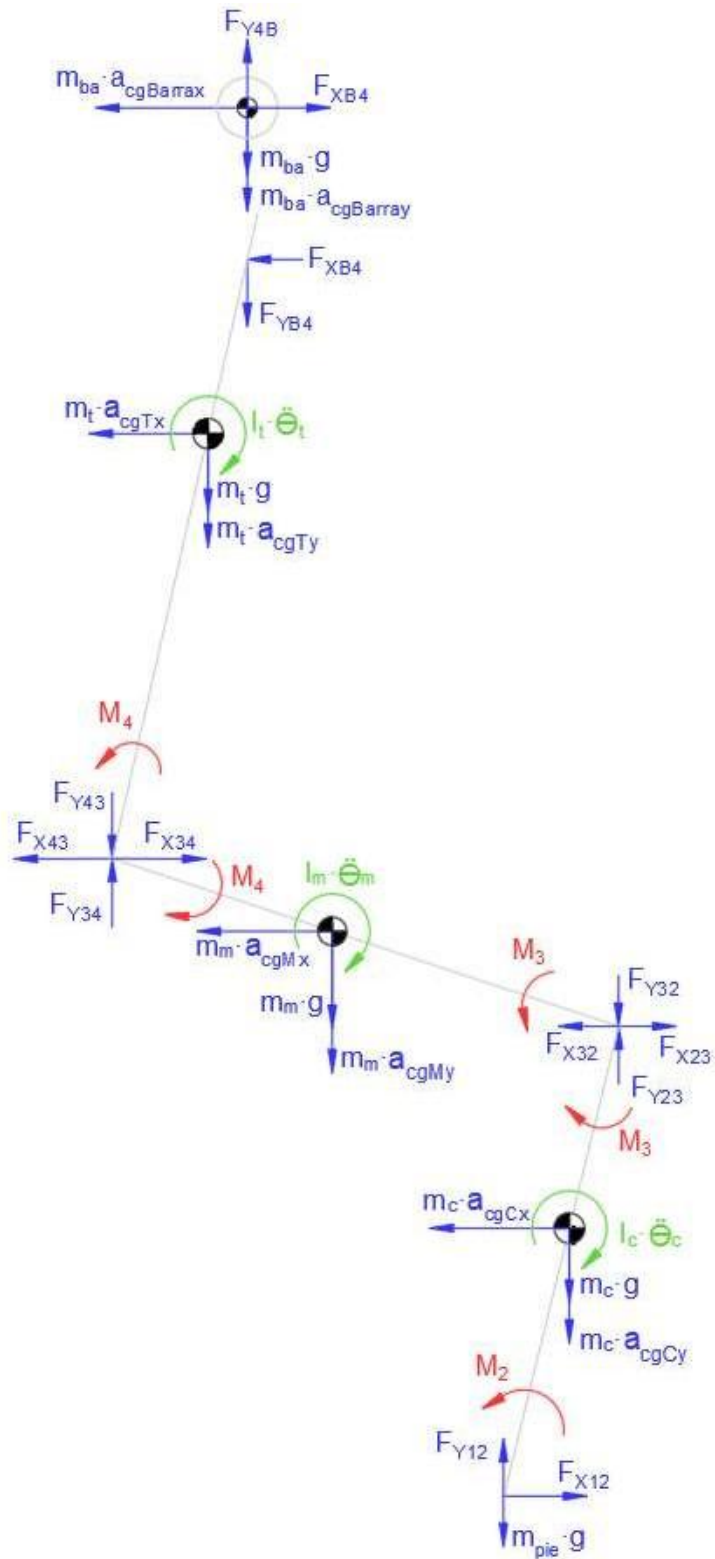


Ilustración 44. Modelo del sistema libre.

3.4.2.1 Equilibrio de fuerzas estático en el eslabón de la pierna para el modelo libre

En la Ilustración 40 se ha representado el sólido rígido de la pierna, el cual es el mismo para el modelo libre y guiado. La diferencia que existe frente al modelo guiado es en el equilibrio de momentos, ya que en el modelo libre se desconoce la reacción horizontal en el suelo que el modelo guiado proporcionaba la plataforma de fuerza.

$$\Sigma \mathbf{M}_{cdg} = \mathbf{0} \rightarrow -F_{F12} \cdot Lc_d \cdot \cos \theta_p - F_{F32} \cdot Lc_p \cdot \cos \theta_p + F_{X32} \cdot Lc_p \cdot \sin \theta_p + F_{X12} \cdot Lc_d \cdot \sin \theta_p + M_2 - M_3 = I_c \cdot \ddot{\theta}_c \quad (114)$$

3.4.2.2 Equilibrio de fuerzas estático en el eslabón del muslo para el modelo libre

El análisis estático de fuerzas en el eslabón del muslo se remite al apartado 3.4.1.2, donde el análisis realizado para el modelo guiado es el equivalente al modelo libre. Las ecuaciones del equilibrio de fuerzas y momentos se equivalen a las ecuaciones (99), (100) y (101), respectivamente.

3.4.2.3 Equilibrio de fuerzas estático en el eslabón del torso para el modelo libre

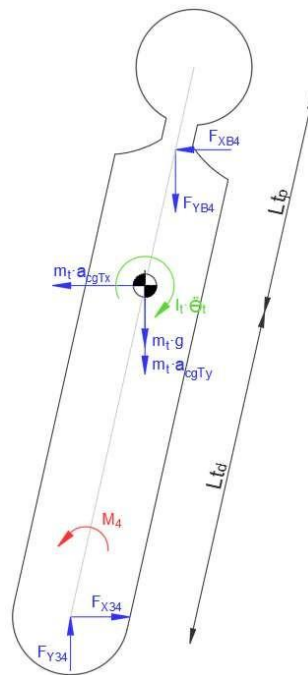


Ilustración 45. Análisis de equilibrio estático en el torso.

En la Ilustración 45 se muestran las fuerzas que afectan a la dinámica del modelo libre. Aparentemente es idéntico al modelo guiado, la diferencia aparece cuando se analiza la barra, donde existe una fuerza de inercia ejercida por la barra libre donde en el modelo guiado era inexistente. Esa fuerza es debida al movimiento y masa de la barra al realizar el movimiento, pues en el modelo guiado era una deslizadera vertical sobre la cual solo se consideraba la masa y fuerza de inercia en el eje vertical, sin considerar el desplazamiento horizontal, ya que estaba restringido. El momento existente en el sólido del torso es el mismo que en el modelo guiado, el momento de la cadera, M_4 .

Analizando el sólido rígido del torso en el plano lateral en los ejes X y Z se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio estático:

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{X34} = F_{XB4} - m_t \cdot a_{cgTx} = m_{ba} \cdot a_{cgBarrax} - m_t \cdot a_{cgTx} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{F34} &= F_{FB4} + m_t \cdot a_{cgTz} + m_t \cdot g \\ &= m_{ba} \cdot a_{cgBarray} + m_{ba} \cdot g + m_t \cdot a_{cgTz} + m_t \cdot g \end{aligned} \quad (116)$$

El equilibrio de momentos, como en los demás eslabones, se realiza desde el centro de gravedad del eslabón.

$$\begin{aligned} \Sigma M_{cdg} = 0 \rightarrow & -F_{F34} \cdot Lt_d \cdot \sin \theta_t + F_{X34} \cdot Lt_d \cdot \cos \theta_t + M_4 \\ &= I_T \cdot \ddot{\theta}_T + m_{ba} \cdot a_{cgBarray} \cdot L_{ba} \cdot \sin \theta_t + m_{ba} \cdot g \cdot L_{ba} \cdot \sin \theta_t \\ &- m_{ba} \cdot a_{cgBarrax} \cdot L_{ba} \cdot \cos \theta_t \end{aligned} \quad (117)$$

Donde,

$$F_{XB4} = m_{ba} \cdot a_{cgBarrax} \quad (118)$$

3.4.2.4 Equilibrio de fuerzas estático en la barra para modelo libre

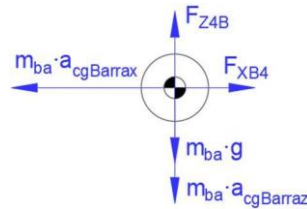


Ilustración 46. Análisis de equilibrio estático en la barra para modelo libre.

Para la representación de la barra usada en el modelo libre, que se muestra en la Ilustración 46, se analiza el diagrama de cuerpo libre de la misma con las siguientes ecuaciones de equilibrio estático:

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{XB4} = m_{ba} \cdot a_{cgBarrax} \quad (119)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{F4B} = m_{ba} \cdot a_{cgBarray} + m_{ba} \cdot g \quad (120)$$

A diferencia del modelo guiado, se considerará la fuerza de inercia en horizontal, pues no existe ninguna guía que evite esa inercia generada en el eje x.

El peso de la barra, es decir, la masa por la gravedad, se considera la fuerza que ejerce la barra en el eje vertical, pues sería equivalente a una fuerza F_{ZB} , que, junto con la fuerza de inercia vertical, se compensa con la fuerza F_{ZB4} . La fuerza de inercia generada en el eje horizontal es compensada por la fuerza F_{XB4} que el cuerpo ejerce sobre la barra en sentido opuesto, evitando así que el cuerpo se desplace.

El sistema se resuelve al igual que en el modelo anterior, pero existen algunas modificaciones en ecuaciones. La matriz a y b se definen como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Lc_d \cdot A & -Lc_d \cdot B & Lc_p \cdot A & -Lc_p \cdot B & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Lm_d \cdot C & Lm_d \cdot D & Lm_p \cdot C & Lm_p \cdot D & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Lt_d \cdot F & -Lt_d \cdot E & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (121)$$

$$A = \sin \theta_p; B = \cos \theta_p; C = \cos(\alpha); D = \sin(\alpha); E = \sin \theta_t; F = \cos \theta_t \quad (122)$$

$$x = \begin{bmatrix} F_{X12} \\ F_{F12} \\ F_{X23} \\ F_{F23} \\ F_{X34} \\ F_{F3} \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$b = \begin{bmatrix} m_c \cdot a_{cgCx} \\ m_c \cdot a_{cgCy} + m_c \cdot g \\ I_c \cdot \ddot{\theta}_c \\ m_m \cdot a_{cgMx} \\ m_m \cdot a_{cgMy} + m_m \cdot g \\ I_m \cdot \ddot{\theta}_m \\ F_{XB4} + m_t \cdot a_{cgTx} \\ m_{ba} \cdot a_{cgBarray} + m_{ba} \cdot g + m_t \cdot a_{cgTy} + m_t \cdot g \\ LI_T \cdot \ddot{\theta}_T + m_{ba} \cdot a_{cgBarray} \cdot L_{ba} \cdot \sin \theta_t + m_{ba} \cdot g \cdot L_{ba} \cdot \sin \theta_t - F_{XB4} \cdot L_{ba} \cdot \cos \theta_t \end{bmatrix} \quad (124)$$

A continuación, realizando la cinemática inversa de matrices se obtienen los valores de las fuerzas y momentos. La ecuación que define la cinemática inversa es la misma que se muestra en la ecuación (113). Se obtienen así, las fuerzas y pares a lo largo del movimiento en fase concéntrica en el movimiento del modelo guiado.

3.4.3 Centro de presiones (CoP)

Por último, en el apartado de cálculo dinámico se van a incluir las ecuaciones de equilibrio que definen el sistema del centro de presiones planteado en el apartado 2.5.4.

En cuanto al análisis de fuerzas para el cálculo del CoP, se realiza un equilibrio en el eje vertical y horizontal.

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_X = F_{X12} = F_{X\text{Plataforma}} \quad (125)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \rightarrow F_{F12} = M_{\text{pie}} \cdot g - F_{GR} \quad (126)$$

Para el cálculo de la fuerza de reacción (F_{GR}) y la distancia a la que se encuentra el CoP (x_{CoP}) se realiza el equilibrio de momentos desde la articulación del tobillo y desde el CoP. La distancia antropométrica del tobillo al suelo se obtiene de la Ilustración 24.

$$\Sigma M_{CoP} = 0 \rightarrow M_2 - F_{X12} \cdot 0,043h - (F_{F12} + M_{\text{pie}} \cdot g) \cdot x_{CoP} = 0 \quad (127)$$

$$x_{CoP} = \frac{-M_2 + F_{X12} \cdot 0,043h}{(F_{F12} + M_{\text{pie}} \cdot g)} \quad (128)$$

$$\Sigma M_{Tobillo} = 0 \rightarrow M_2 - F_{X12} \cdot 0,043h + F_{GR} \cdot x_{CoP} = 0 \quad (129)$$

$$F_{GR} = \frac{-M_2 + F_{X12} \cdot 0,043h}{x_{CoP}} \quad (130)$$

3.5 Experimentación

Este punto se centra en el desempeño de la práctica del estudio experimental de la sentadilla en el laboratorio deportivo de la Universidad de Almería (UAL). Los ensayos de la sentadilla libre y guiada se realizaron en dos días distintos, así como cada ejercicio fue ejecutado por un atleta diferente. A continuación, en la Ilustración 47 se observa la realización del ejercicio de la sentadilla en la máquina Smith llevado a cabo por uno de los atletas.

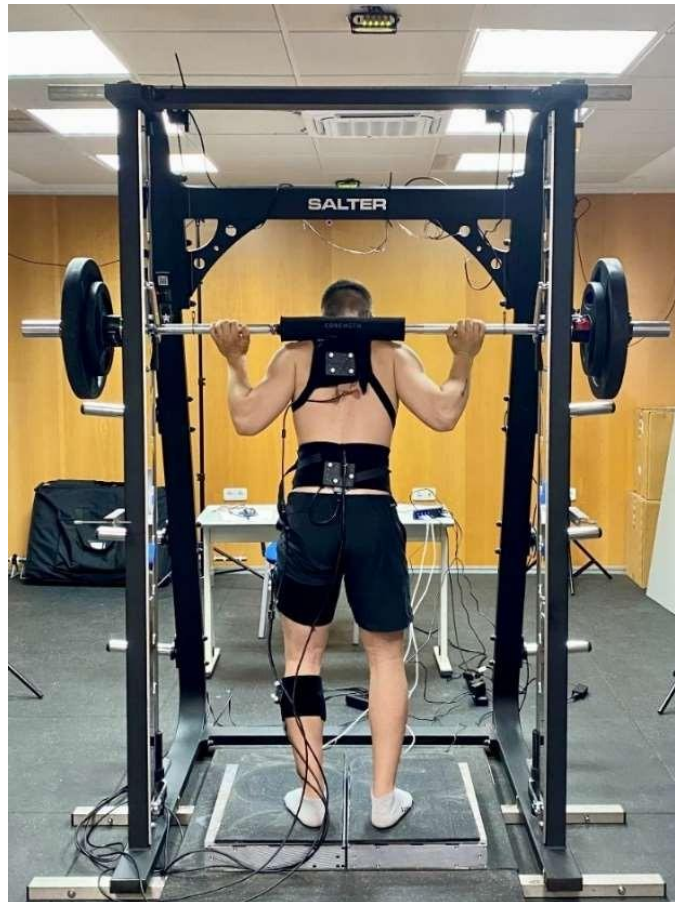


Ilustración 47. Atleta realizando la sentadilla en la máquina Smith.

Para la toma de medidas de ambos modelos se emplearon una serie de elementos de medición que permitieron la obtención de los valores necesarios para la realización del estudio.

- Plataforma de fuerza triaxial: es el instrumento de medida empleado para obtener las fuerzas de reacción con el suelo en los ejes X, Y y Z. Las fuerzas que se usaron fueron las resultantes de las reacciones en el plano de interés (sagital) para el modelo. En la Ilustración 48 se muestran las dos plataformas de fuerza empleadas en las mediciones.

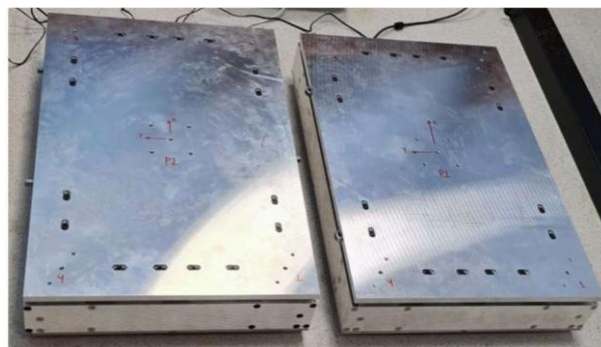


Ilustración 48. Plataforma de fuerza triaxial.

- IMUs: son elementos compuesto por un acelerómetro y giroscopio. Permiten medir velocidad de giro, aceleración u orientación tridimensional. En el ensayo se usaron para registrar el movimiento en cada una de las partes en las que se situó. En la sentadilla libre se emplearon tres IMUs, mientras que en el modelo guiado se emplearon cuatro para obtener un dato extra y ser así más precisos en la parte del torso, añadiendo dos en este segmento, mientras los otros dos restantes se colocaron en la pierna y el muslo, respectivamente, tanto en el modelo guiado como en el modelo libre.



Ilustración 49. IMU.

- Encoder lineal: son dispositivos que transforman el movimiento en una señal eléctrica. Estos elementos fueron empleados para el registro de la posición de la barra durante el ejercicio.

En los ensayos se realizaron las tomas de datos que se muestran en la Tabla 9:

Ensayos			
Modalidad	Peso	Velocidad rápida	Velocidad lenta
Sentadilla libre	40 kg (50% PC*)	1 serie 6 repeticiones	1 serie 6 repeticiones
Sentadilla guiada	35 kg (50% PC*)	3 series 5 repeticiones	3 series 5 repeticiones
	70 kg (100% PC*)	----	3 series 5 repeticiones

Tabla 9. Ensayos realizados en las dos modalidades de la sentadilla. (PC: peso corporal, *: representa una aproximación al porcentaje indicado de peso corporal, ya que se trataba de discos calibrados)

De las repeticiones que se realizaron en cada ejercicio, finalmente se recortaron los conjuntos de datos obtenidos y se trabajó con tres repeticiones para cada modalidad. En la sentadilla guiada, de las cinco repeticiones realizadas, se eliminó la primera y la última y, fue la segunda de las tres series realizadas la que se tomó por válida. Por otro lado, en la sentadilla libre se realizó el estudio con la segunda, tercera y cuarta repetición.

Por último, se muestran los pesos y alturas de los atletas que realizaron los dos ejercicios:

- Atleta 1: 1,73 m y 70 kg.
- Atleta 2: 1,72 m y 74 kg.

3.6 Datos de partida

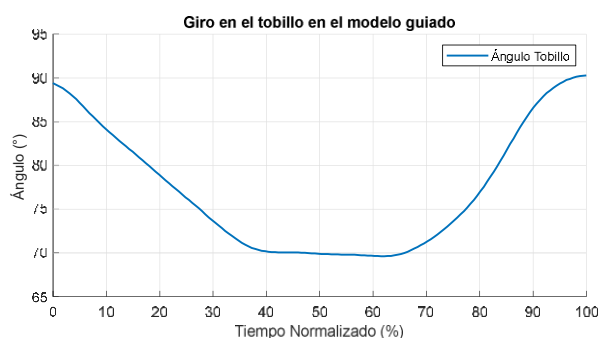
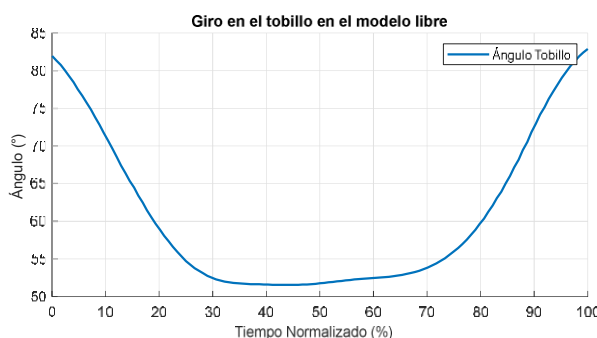
En este apartado, se van a documentar todos los datos de partida sobre los cuales se han obtenido los resultados. Estos datos han sido facilitados por el departamento de ingeniería mecánica de la Universidad de Almería. Los datos fueron obtenidos mediante los IMUs, los cuales proporcionaron valores de velocidad y aceleración de cada uno de los sólidos rígidos. Para la representación de las gráficas frente al tiempo normalizado (indica el desplazamiento en cada repetición en porcentaje de 0 a 100) se han empleado los datos registrados por el encoder, que registra el movimiento de la barra durante el ejercicio. El tiempo normalizado se muestra de 0-100%, siendo de 0-50% la fase excéntrica del ejercicio y de 50-100% la fase concéntrica.

Los datos representados se han alcanzado en la realización de tres repeticiones seguidas de recorrido completo, de la misma forma en ambos modelos. Se ha obtenido la media de las tres repeticiones, la cual indica la tendencia general del modelo. El registro de datos fue realizado con una frecuencia de muestreo de 100Hz.

3.6.1 Posición angular de las articulaciones

Uno de los datos de entrada más importantes es la posición angular de las articulaciones a lo largo del ejercicio, pues es la variable que define la cinemática del movimiento, influyendo directamente sobre las velocidades y aceleraciones angulares. En este apartado se va a mostrar la posición angular de la articulación del tobillo, la rodilla y la cadera en el modelo libre y en el modelo guiado para el ejercicio de la sentadilla.

En la Ilustración 50 se representan los ángulos medios obtenidos en las tres repeticiones de las articulaciones principales en todo el ejercicio. Sobre estos datos se ha trabajado para obtener las velocidades y aceleraciones de los dos modelos.



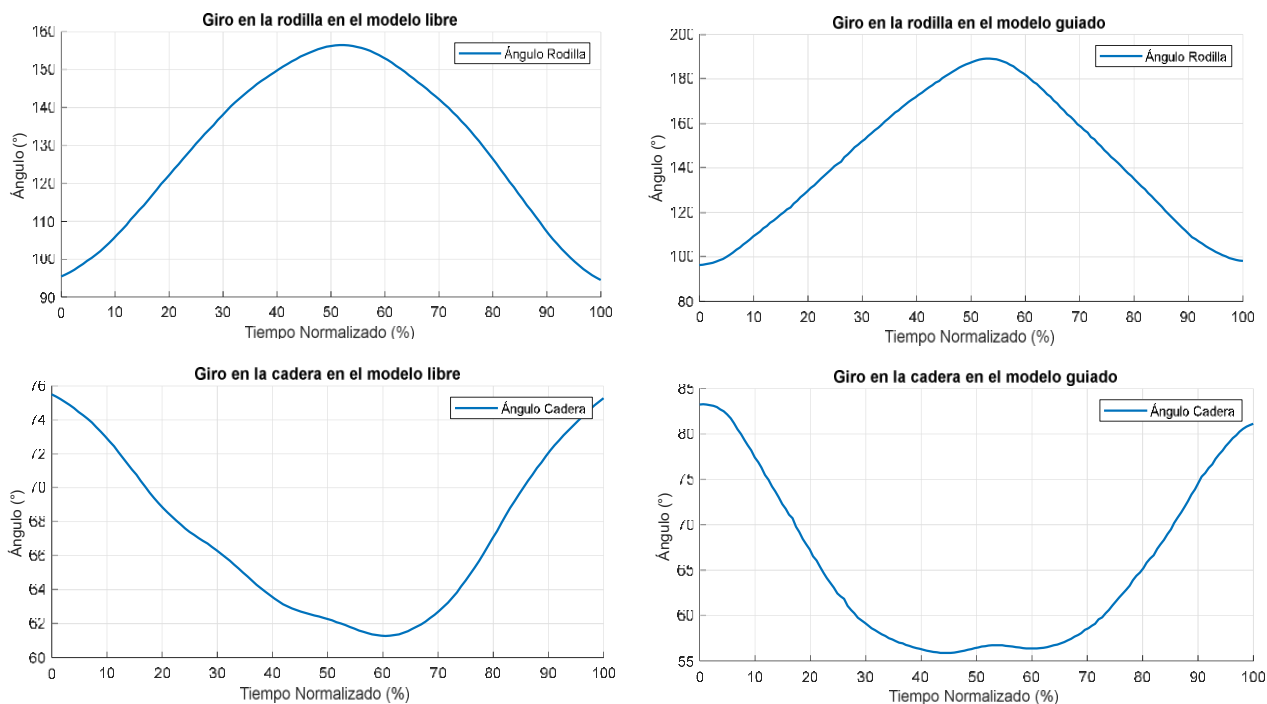
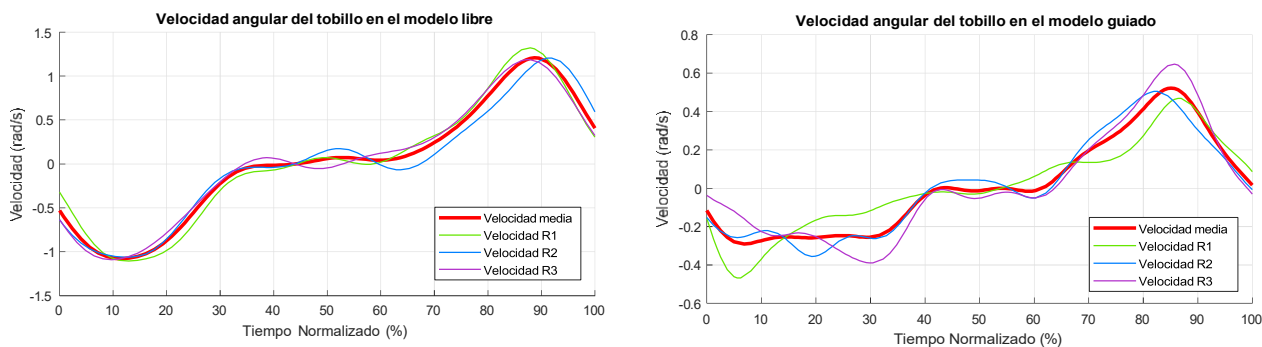


Ilustración 50. Media de los ángulos de las articulaciones obtenidos en las tres repeticiones en el modelo frente al ciclo total del ejercicio.

3.6.2 Velocidades angulares de las articulaciones

De la posición angular obtenida a lo largo del recorrido en cada articulación deriva la velocidad angular, otro parámetro de interés, junto con la aceleración, que define la cinemática del ejercicio. Se ha realizado una media de las velocidades angulares de las tres repeticiones para obtener la tendencia y un resultado más real. A continuación, se muestran las velocidades obtenidas en las articulaciones para los dos modelos.



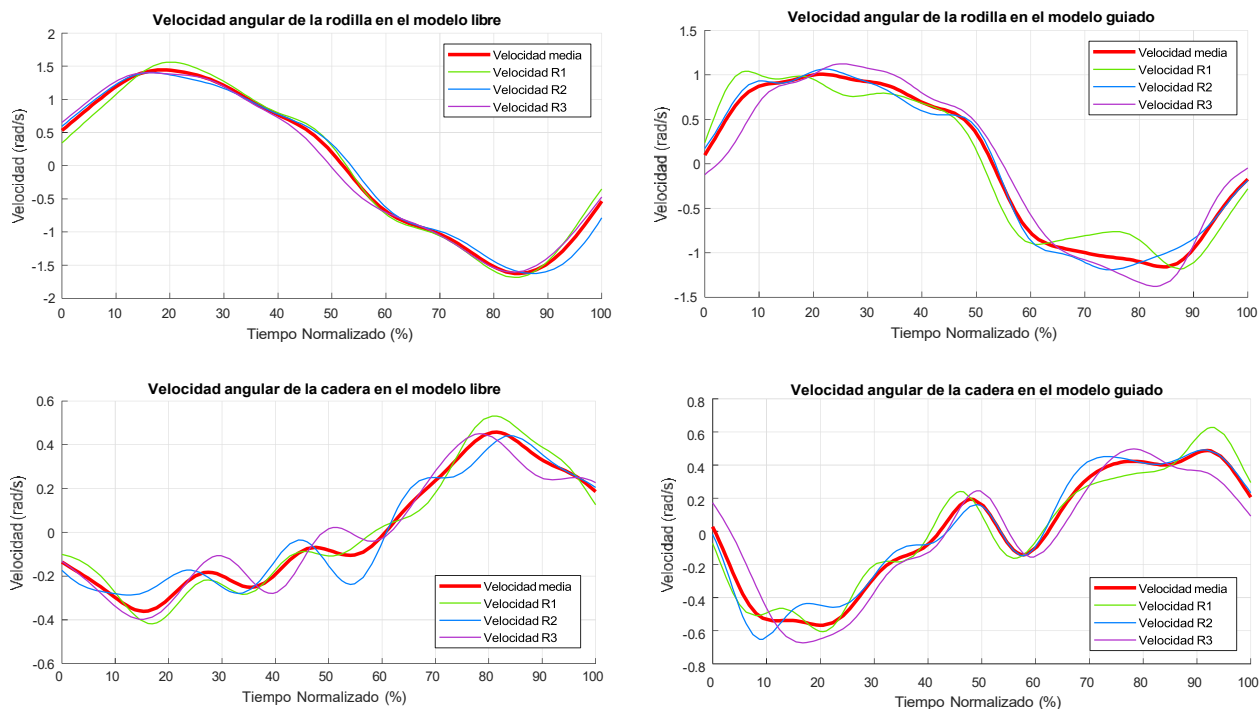


Ilustración 51. Velocidades angulares en las articulaciones de cada repetición y la media de las tres para los dos modelos.

La respuesta en las tres repeticiones mostrada en la Ilustración 51 para el modelo libre es muy similar en las articulaciones del tobillo y la rodilla, mientras que, en la cadera, se observan velocidades más inestables y con mayor oscilaciones. Los valores más elevados de velocidad angular se encuentran en la articulación de la rodilla, sobrepasando los 1,5 rad/s.

Por otra parte, para el modelo guiado, se muestran respuestas con una tendencia un poco distinta en cada articulación, lo que lo diferencia del modelo libre, que obtiene una respuesta más uniforme en las tres repeticiones. Las mayores velocidades para el modelo guiado se alcanzan en la articulación de la rodilla, con valores que se sitúan en 1,37 rad/s. En el tobillo y la cadera, por el contrario, las velocidades alcanzadas son ligeramente menores. Cabe añadir, que, en la parte isométrica de la fase, la velocidad es nula, lo que representa el instante en el que el cuerpo se mantiene estático en la parte más baja del recorrido.

3.6.3 Aceleraciones angulares de las articulaciones

A continuación, se muestran las aceleraciones angulares que se generan en cada articulación y las aceleraciones lineales alcanzadas en los centros de gravedad de los segmentos de cada eslabón.

En primer lugar, se muestran las aceleraciones angulares que se producen en las articulaciones del tobillo, la rodilla y la cadera. Cabe añadir, que la articulación del tobillo, al ser un punto de

apoyo fijo, la aceleración lineal producida en ese punto es nula, pues solo existe aceleración angular en esa articulación.

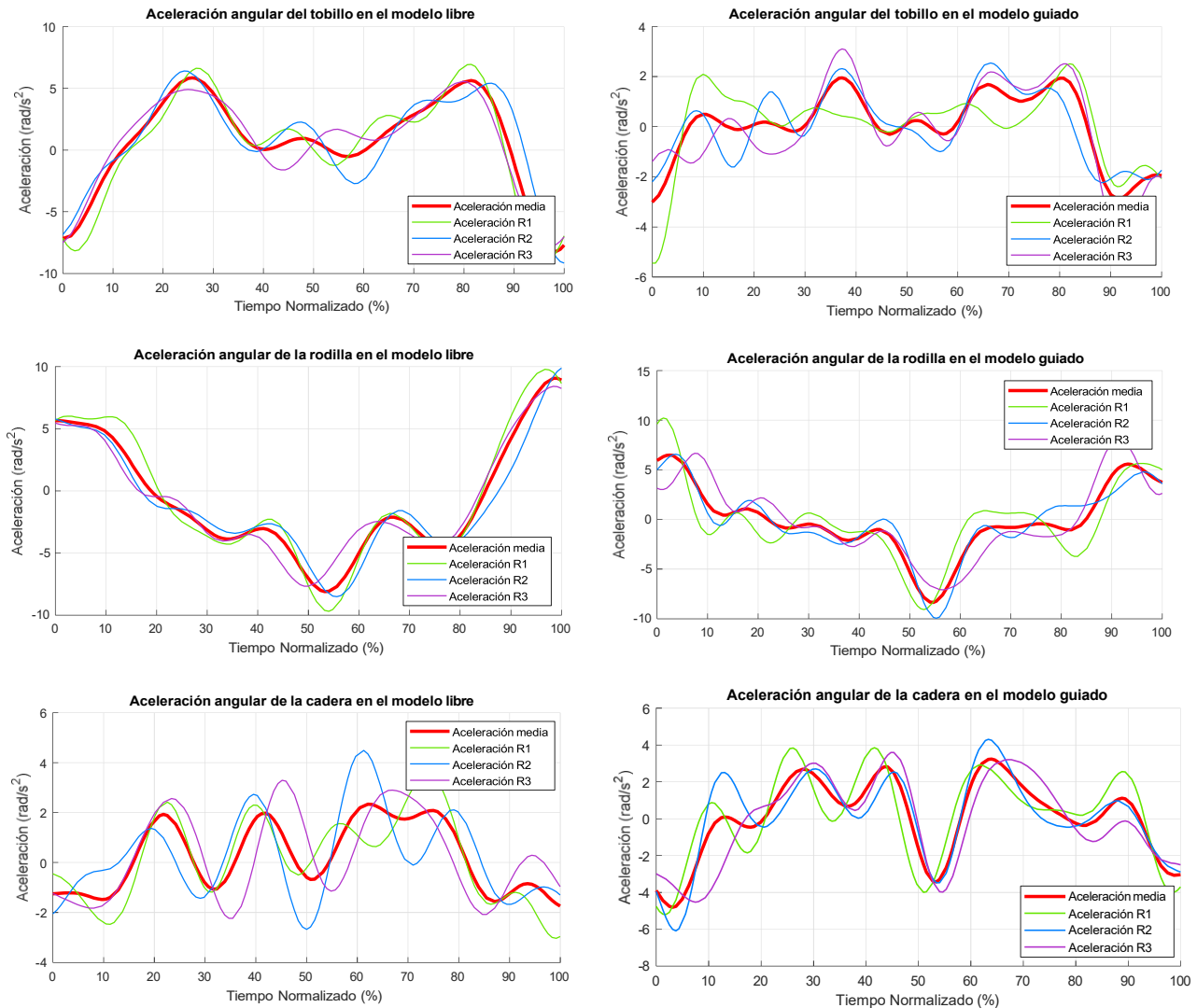


Ilustración 52. Aceleraciones angulares obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la aceleración media de todas las repeticiones.

En la Ilustración 52 se representan las gráficas que muestran las aceleraciones angulares de los dos modelos que se producen en cada articulación.

En primer lugar, en el modelo libre las aceleraciones de mayor magnitud se alcanzan en la articulación de la rodilla, donde la aceleración angular máxima alcanza un valor de $8,10 \text{ rad/s}^2$. Sin embargo, la cadera es la articulación que menores aceleraciones sufre, a pesar de ser la que tiene una respuesta más sobreoscilada. Por el contrario, el tobillo obtiene una respuesta en la primera fase excéntrica alcanzando una aceleración angular media de $5,86 \text{ rad/s}^2$, en la fase

isométrica la respuesta de la aceleración tiende a cero y en la segunda parte del ciclo, la fase concéntrica, obtiene otro registro de 5,63 rad/s².

Así mismo, en el modelo guiado las aceleraciones angulares de mayor magnitud se registran en la misma articulación que en el modelo libre, la rodilla, donde se alcanza un valor medio de 8,34 rad/s² en el instante donde la fase pasa de excéntrica a concéntrica. Por otro lado, el tobillo sufre unas aceleraciones muy discretas, tendiendo a cero en varias partes del ciclo, incluso en el instante isométrico de la misma. La cadera, por el contrario, registra un pico medio en ese mismo instante, alcanzando un valor de 3,41 rad/s².

3.6.4 Curvas de fuerza de la plataforma

Otro de los datos de interés son las fuerzas medidas en la plataforma de fuerza. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en las mediciones para el modelo libre (Ilustración 53) y el modelo guiado (Ilustración 54). Estos datos que proporcionan la plataforma serán posteriormente utilizados en el análisis de los resultados y validación del modelo para ver que las fuerzas obtenidas en el modelo teórico y en la realidad tienen similitud.

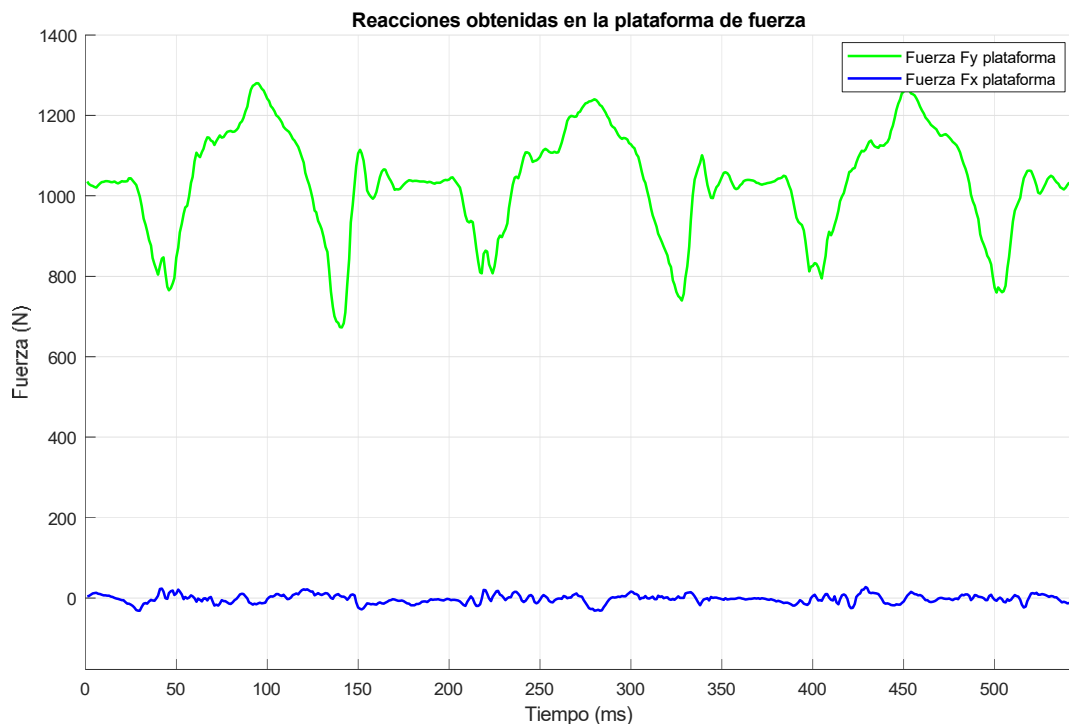


Ilustración 53. Reacciones verticales y horizontales medidas en la plataforma durante las tres repeticiones para el modelo libre.

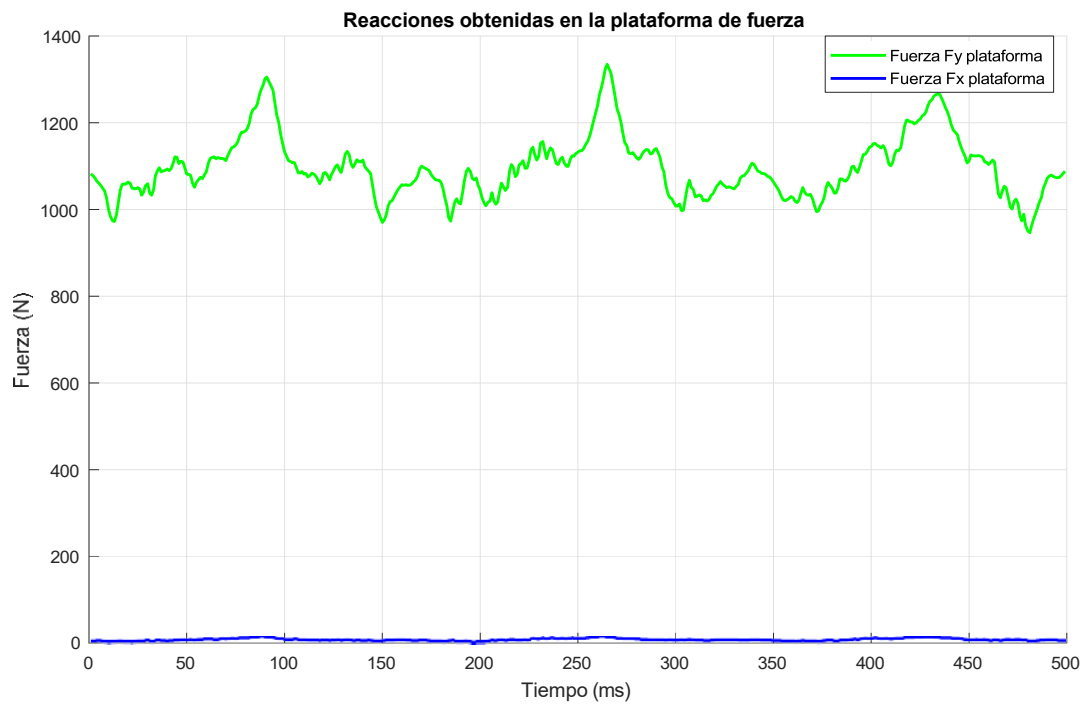


Ilustración 54. Reacciones verticales y horizontales medidas en la plataforma durante las tres repeticiones para el modelo guiado.

4. Resultados y discusión

En este apartado de discusión y análisis se van a mostrar los resultados alcanzados en el modelo teórico con los datos de entrada de los ensayos que han sido representados en el apartado 3.6. Además, se va a realizar una comparativa entre ambos modelos (guiado y libre), así como entre los resultados obtenidos en los ensayos frente los alcanzados en el modelo teórico. Entre los parámetros a comparar destacan las fuerzas resultantes en el suelo medidas con la plataforma de fuerza frente las obtenidas mediante el análisis dinámico en el modelo teórico, el centro de presiones (CoP), el desplazamiento horizontal de la barra para el análisis de estabilidad y los pares articulares. Así mismo, se realiza también una comparativa entre los resultados obtenidos y la bibliografía documentada por otros estudios para contrastar los datos concluidos y ver las diferencias existentes.

Los resultados de interés que se van a valorar de cada ensayo son las velocidades y aceleraciones lineales de los centros de gravedad de cada segmento (pierna, muslo y torso), los pares cinemáticos y las fuerzas internas que se producen en cada articulación. Las velocidades y aceleraciones lineales que se van a representar son las resultantes de ambas direcciones (X,Y).

4.1 Modelo libre

En este apartado se van a analizar los resultados obtenidos para la cinemática y la dinámica del movimiento de sentadilla libre.

4.1.1 Velocidades

A continuación, se muestran las gráficas correspondientes a la velocidad de los centros de gravedad de los segmentos de cada eslabón.

La respuesta de las velocidades mostrada en la Ilustración 55 para los centros de gravedad de cada segmento sigue una tendencia similar. Las velocidades más elevadas se alcanzan en el segmento del torso, sobrepasando los 0,8 m/s en la fase concéntrica del ejercicio. Por otro lado, en todos los segmentos se observa como la velocidad disminuye en el instante que el ejercicio pasa de fase concéntrica a excéntrica, es decir, en el instante en el que el sujeto alcanza la máxima profundidad del ejercicio e impulsa el cuerpo hacia arriba. Es en esa misma parte de la fase del ejercicio, donde las velocidades alcanzadas son de mayor magnitud, indican una pequeña diferencia en la ejecución del ejercicio, pues eso se traduce en que el sujeto aguantó bien el peso en la fase descendente (excéntrica) y seguidamente lo impulsó extendiendo sus

piernas generando una velocidad mayor que en la fase de bajada, lo que indica que el peso que ejercía la barra se venció y pudo ser elevado.

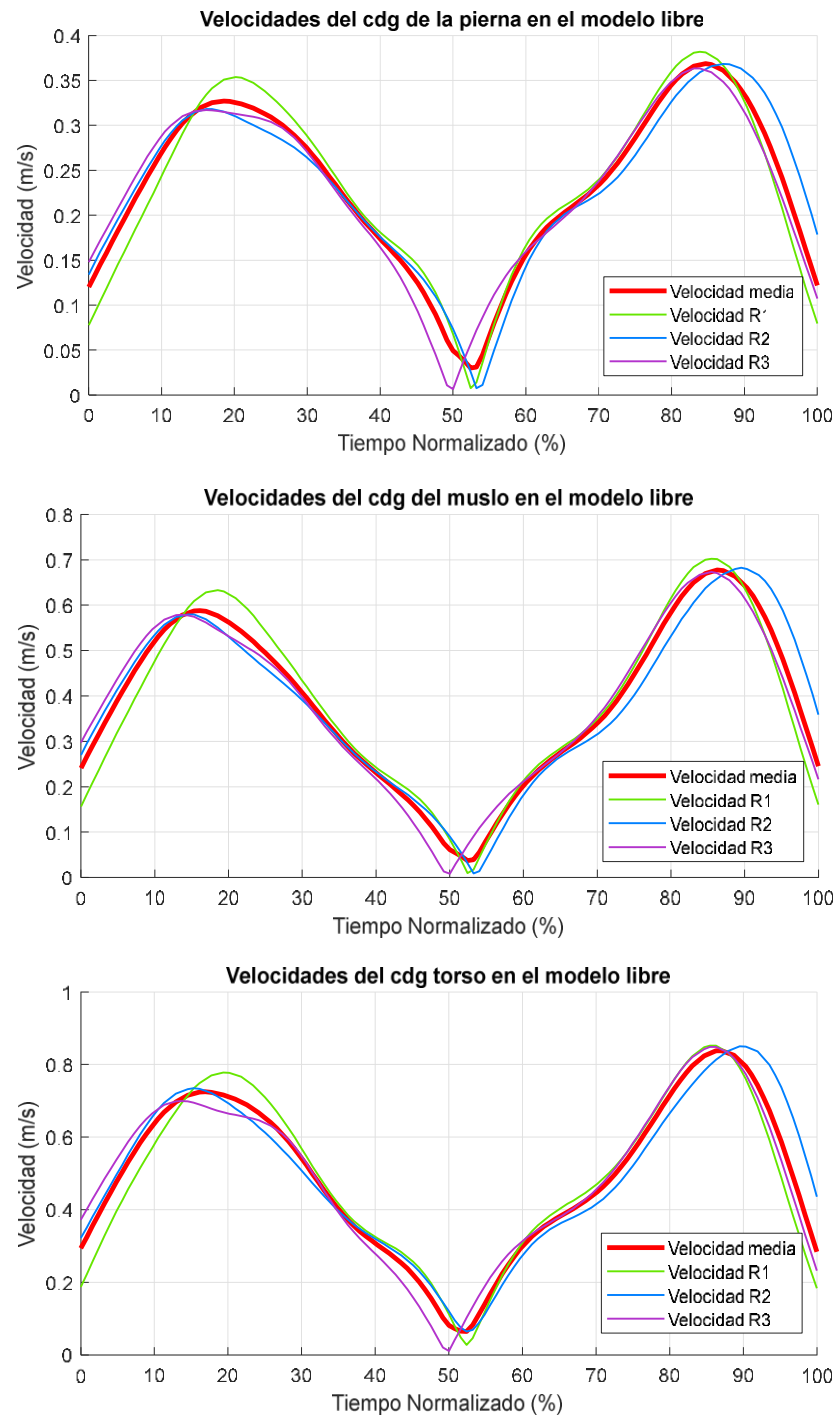


Ilustración 55. Velocidades lineales de los centros de gravedad de cada segmento en cada repetición (R1, R2, R3) junto con la velocidad media de todas las repeticiones para el modelo libre.

En la Ilustración 56 se muestra la gráfica que representa la velocidad de la barra a lo largo de todo el recorrido del ejercicio. Se observan claramente dos picos de velocidad en la barra, donde el ciclo se encuentra sobre el 20% y el 80%. En esos instantes la barra está en el punto del recorrido donde mayor velocidad alcanza, al contrario del instante en el que la fase pasa de excéntrica a concéntrica (50% de la fase), donde el usuario se encuentra en el punto más bajo del recorrido y la barra tiene valor muy bajo o nulo de velocidad por unos instantes.

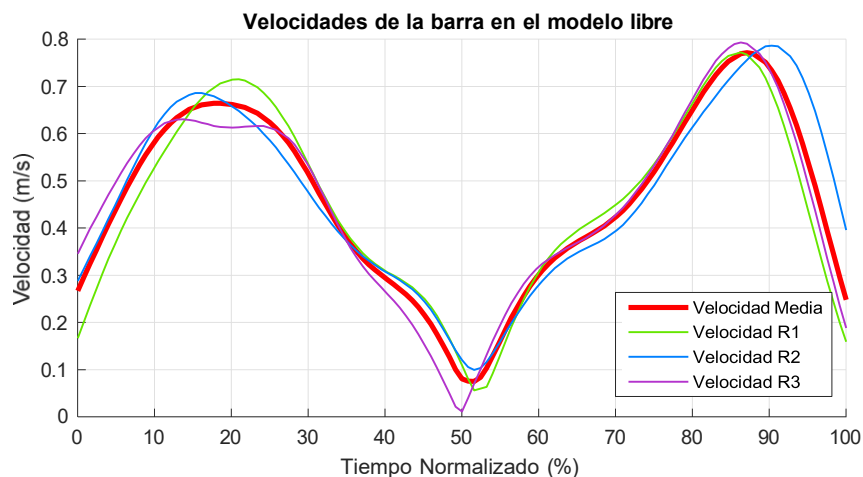


Ilustración 56. Velocidad de la barra en cada repetición realizada y la media de las tres repeticiones en la sentadilla libre.

4.1.2 Aceleraciones

Seguidamente, se muestran las aceleraciones lineales de los centros de gravedad de los eslabones que han sido representados en las velocidades.

Las aceleraciones representadas en la Ilustración 57 muestran la tendencia de las aceleraciones en cada uno de los segmentos estudiados. Las aceleraciones lineales máximas se producen por cambios rápidos en la pendiente de la curva de la velocidad lineal, es decir, grandes incrementos de velocidad en poco tiempo. Se observa que las mayores aceleraciones se alcanzan en el torso, al principio de la fase concéntrica, lo que puede plantear que se alcanza esa aceleración máxima en el instante que el sujeto realiza el movimiento ascendente para vencer el peso que la barra ejerce sobre su cuerpo.

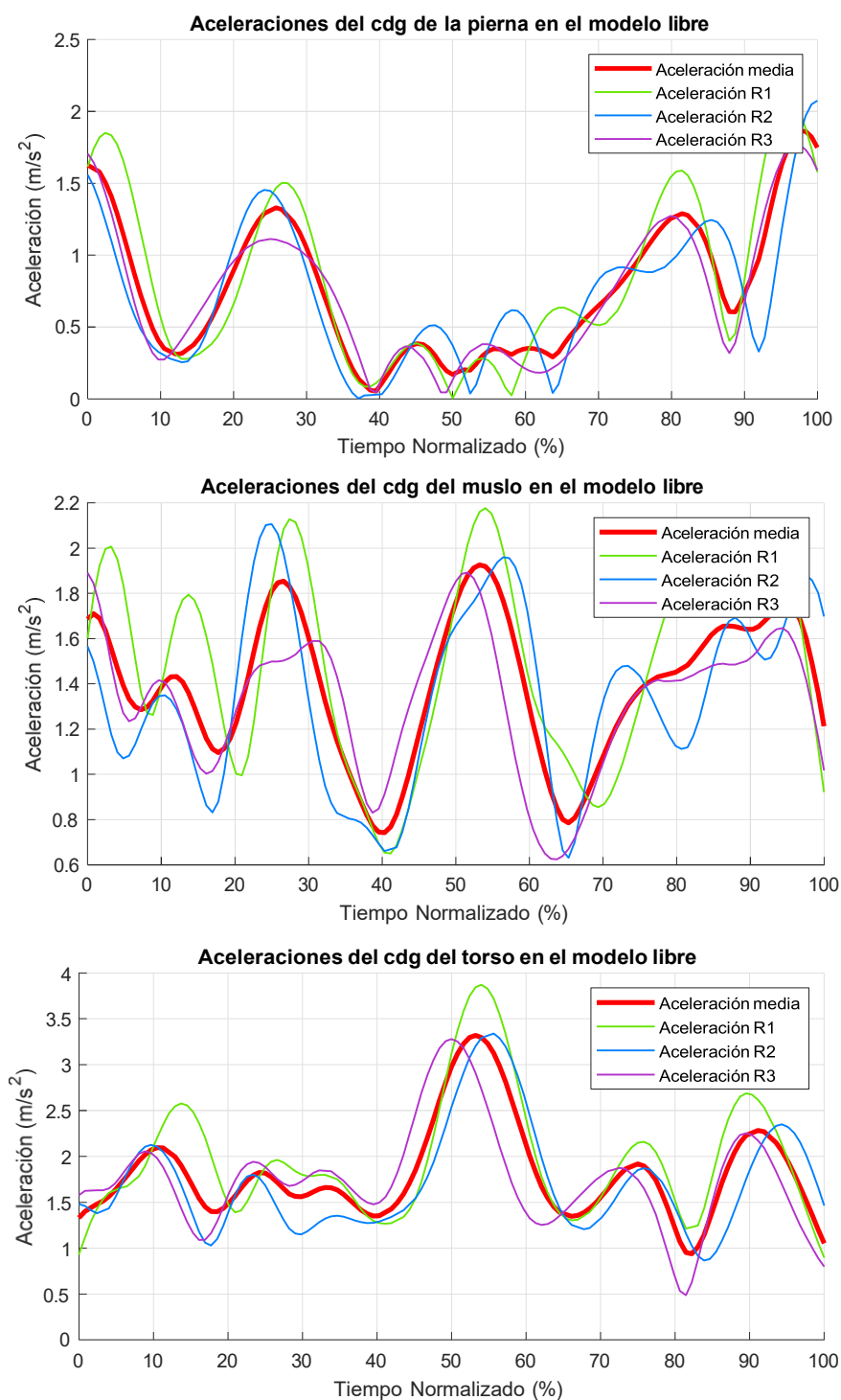


Ilustración 57. Aceleraciones lineales obtenidas en el centro de gravedad de cada segmento para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la aceleración media de todas las repeticiones.

Por otro lado, en la Ilustración 58 se muestra la gráfica que representa la aceleración de la barra a lo largo de todo el recorrido del ejercicio. En el instante que la fase pasa de concéntrica a excéntrica, el usuario registra un máximo de aceleración en ese momento debido al gran

incremento de velocidad que se genera en poco tiempo, alcanzando un valor medio de unos 3,3 m/s², a pesar de que el máximo de aceleración se ha alcanzado en la primera repetición del ejercicio, donde se ha llegado a un valor máximo cercano a los 4 m/s².

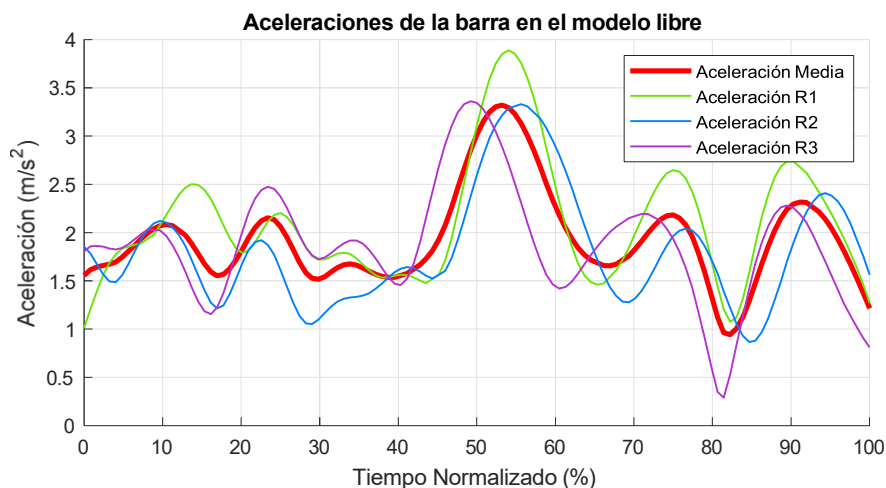


Ilustración 58. Aceleraciones de la barra para cada repetición realizada junto con la media de las tres repeticiones en la sentadilla libre.

4.1.3 Pares articulares

El principal objeto de estudio que define y diferencia los dos modelos de ejercicios son los pares que se ejercen en cada articulación. La obtención de los pares articulares se ha realizado mediante la dinámica inversa obtenida en la ecuación (113), tomando los valores obtenidos de aceleración y velocidades angulares en las articulaciones. Los resultados de los pares se van a estudiar en valor absoluto. Los valores máximos hacen referencia a los valores máximos alcanzados en el instante en el que el cuerpo se encuentra en el punto más bajo del recorrido, donde la profundidad es mayor.

La Ilustración 59 muestra los valores de los pares que se ejercen al realizar el ejercicio. Para estudiar el par en cada articulación y justificar de forma correcta el resultado, se observa el instante donde el cuerpo se encuentra en el punto más bajo del recorrido, el instante de fase isométrica, donde se cambia de fase excéntrica a concéntrica. En la articulación del tobillo se registran unos pares de 88,50 Nm y de 13,35 Nm, obteniendo un valor medio de 34,45 Nm. Por otro lado, la rodilla es la articulación donde mayor par se ejerce, con unos valores en el punto más bajo de la fase que, dependiendo de la repetición, van desde los 288,24 Nm hasta los 345,95 Nm, siendo la media de 320,20 Nm. La cadera, por detrás de la rodilla, se obtienen unos pares desde 134,24 Nm en el punto más bajo de la segunda repetición, hasta los 183,41 Nm obtenidos en la primera y tercera repetición, obteniendo una media de 166,85 Nm.

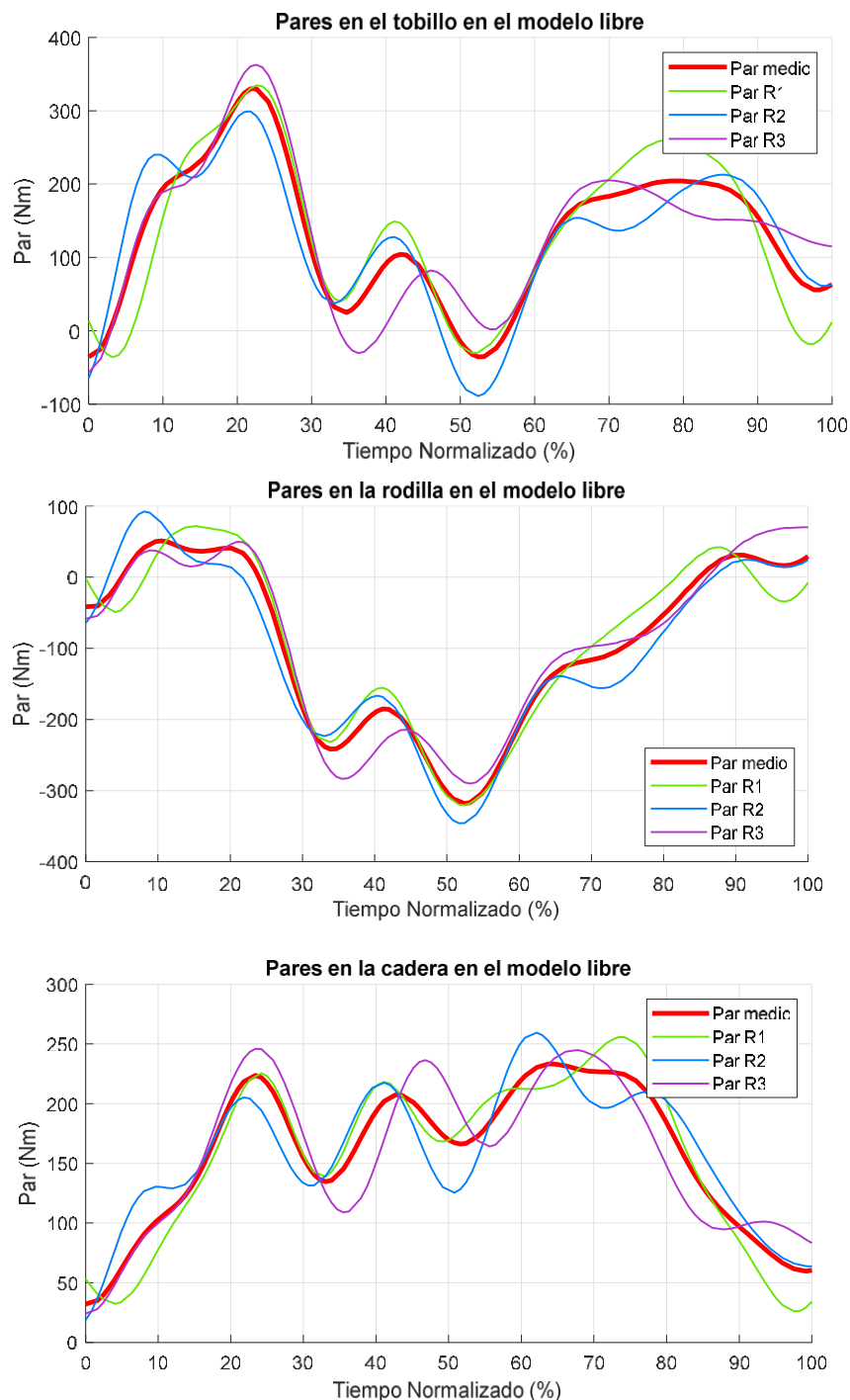


Ilustración 59. Gráficas de los pares articulares obtenidos en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con el par medio de cada repetición para el modelo libre.

Los valores máximos que se alcanzan en el ejercicio para cada articulación no siempre coinciden con el instante isométrico, es tal así, que en la Ilustración 59 se observan las curvas de par donde se representan los valores máximos para cada articulación. En la articulación de la rodilla, por el contrario, el valor de par máximo si coincide con la fase isométrica.

4.1.4 Fuerzas internas en las articulaciones

Los resultados obtenidos en las fuerzas que soportan las articulaciones, calculados en el apartado dinámico 3.4.2 se representan en la Ilustración 60 y la Ilustración 61.

Las fuerzas internas horizontales (F_x) en todas las articulaciones denotan una tendencia muy similar. En todas las repeticiones las fuerzas son parecidas para un mismo instante, así como la media se adapta a las curvas de todas las repeticiones. Para un valor de la fase donde se encuentra en la parte isométrica del ejercicio, los valores obtenidos en el tobillo son de 112,58 N, en la rodilla de 114,53 N y en la cadera de 113,98 N. Estos resultados indican una tendencia en la fuerza horizontal estable en todas las articulaciones.

Las fuerzas internas verticales (F_y), al igual que las horizontales, tienen una tendencia parecida en las tres articulaciones. Tomando la misma referencia que en la horizontal, para un valor del instante isométrico de la fase, las reacciones resultantes en el tobillo son de 1375,2 N, en la rodilla 1316,81 N y 1170,31 N en la cadera. Los resultados indican unas reacciones verticales mayores en los segmentos más próximos al suelo.

Se observa para el modelo libre en la Ilustración 62 una diferencia notable entre la fuerza interna media vertical y la fuerza interna media horizontal para cada articulación. Pues la fuerza interna horizontal para todas las articulaciones tiene una tendencia que es próxima a cero, lo que afecta en la resultante de ambas, que se refleja prácticamente de manera idéntica a la fuerza interna media vertical. Con estos resultados se puede observar que la fuerza interna horizontal en las articulaciones para el modelo libre tiene poca influencia sobre la fuerza total resultante.

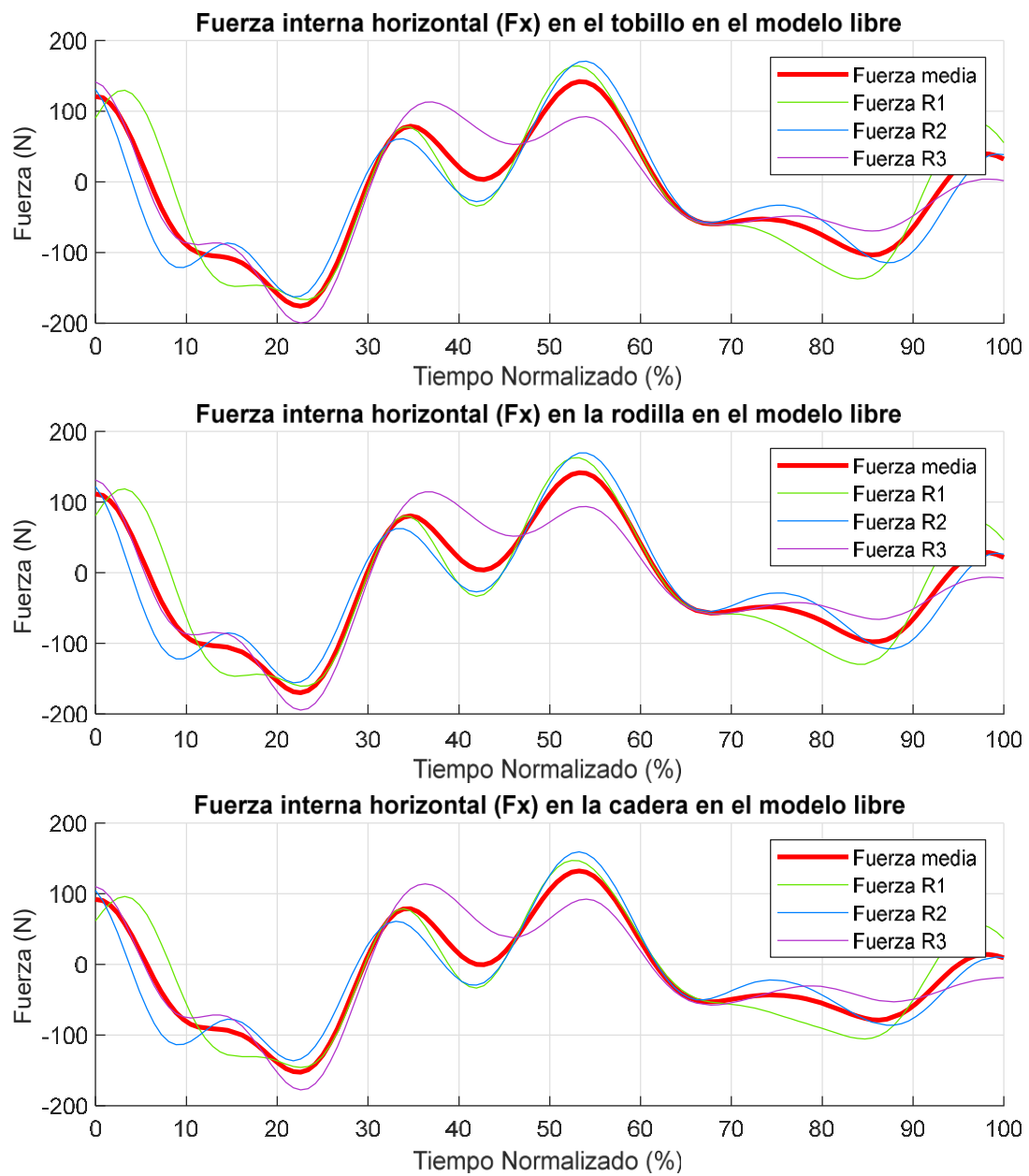


Ilustración 60. Fuerzas internas horizontales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) en conjunto con la fuerza media de todas las repeticiones.

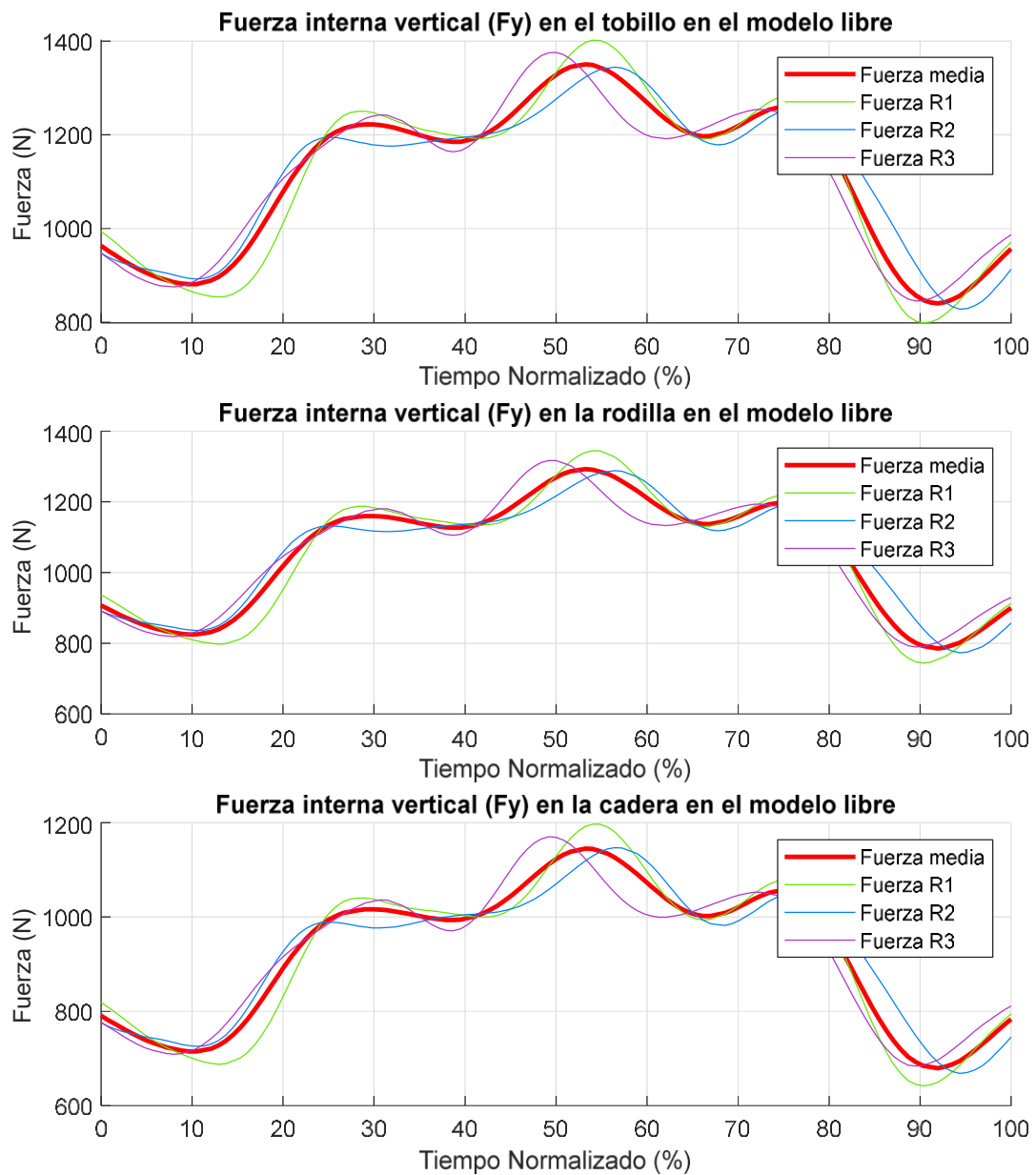


Ilustración 61. Fuerzas internas verticales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) en conjunto con la fuerza media de todas las repeticiones.

A continuación, se muestra la fuerza interna resultante en cada articulación.

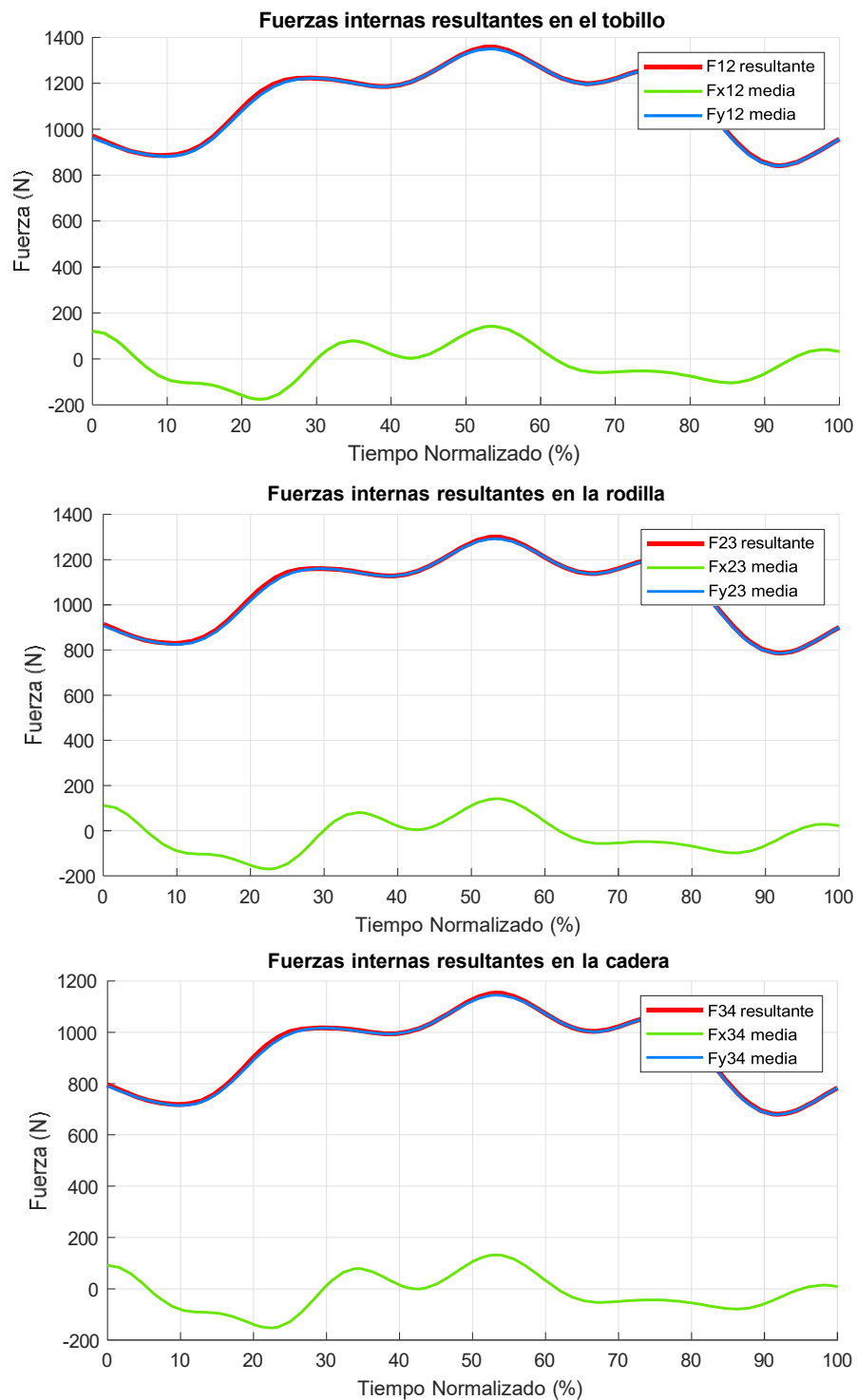


Ilustración 62. Fuerzas internas medias resultantes en cada articulación frente las obtenidas en el eje vertical y horizontal.

4.1.5 Reacción en el suelo

En la Ilustración 63 se muestran las curvas de fuerza en el plano horizontal y vertical que han sido registradas por las plataformas de fuerza empleadas en las mediciones del ejercicio de la sentadilla libre. Por otro lado, se representan las fuerzas F_{x12} y F_{y12} que se realizan en el tobillo, el punto de apoyo directo con la plataforma.

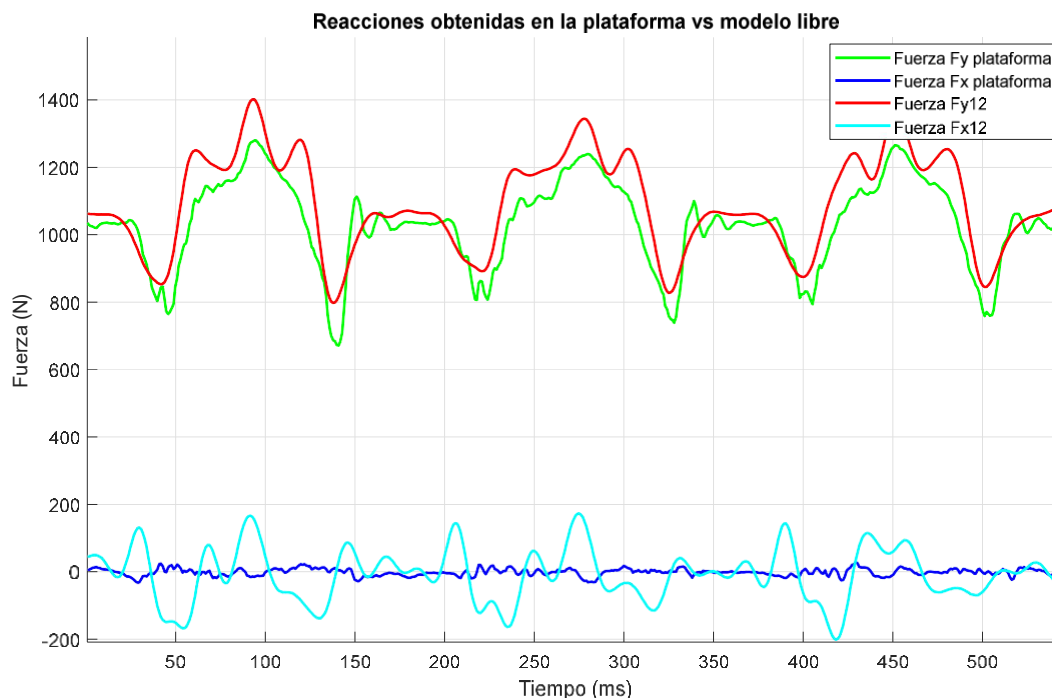


Ilustración 63. Gráfica de la fuerza registrada en la plataforma frente al valor de fuerza obtenida mediante la dinámica del modelo libre.

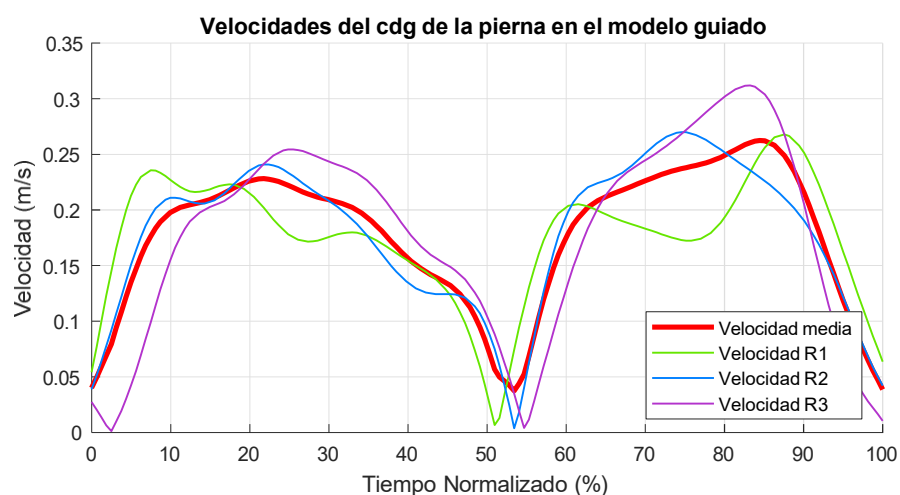
El resultado obtenido para el modelo teórico libre se adapta gráficamente al resultado real de la plataforma. Los resultados obtenidos en el modelo planteado para la sentadilla libre se sitúan ligeramente por encima de los resultados en la plataforma, lo que se debe a las diferencias del peso teórico de la persona y su peso real. Para validar el modelo y comprobar que la curva del modelo teórico se adapta a la realidad, con la herramienta de Matlab 'corrcoef' se ha obtenido un factor de correlación entre la fuerza vertical registrada por la plataforma (F_y plataforma) y la fuerza vertical en el tobillo (F_{y12}) según el modelo matemático para el modelo de peso libre. El resultado del factor de correlación en el sistema libre fue de 0,9005577, una correlación cercana a 1, lo que refleja una proximidad entre el modelo teórico y la realidad.

4.2 Modelo guiado

Para el modelo guiado se van a reflejar los mismos parámetros representados en el modelo libre, para posteriormente poder realizar una comparativa entre ambos modelos y observar las diferencias existentes.

4.2.1 Velocidades

La respuesta en las velocidades que se muestra en la Ilustración 64 tiene una tendencia muy similar en todos los segmentos, es así, que todos alcanzan máximos de velocidad al principio de la fase excéntrica y final de la concéntrica (20% y 80% de la fase respectivamente), de manera aproximada. Las mayores velocidades se alcanzan en el torso, al igual que en el modelo libre. Por el contrario, el segmento de la pierna obtiene velocidades muy pequeñas, la velocidad máxima media en ese segmento supera ligeramente los 0,25 m/s, mientras que en el muslo alcanza los 0,5 m/s y en el torso los 0,6 m/s de velocidad máxima media. Por otro lado, la tendencia de las velocidades indica que la velocidad en la fase concéntrica es mayor que en la fase excéntrica, lo que indica que el sujeto aguantó el peso de forma controlada en la fase descendente del ejercicio y en la fase de extensión de los músculos, es decir, la fase ascendente de la sentadilla, impulsó el cuerpo con mayor velocidad.



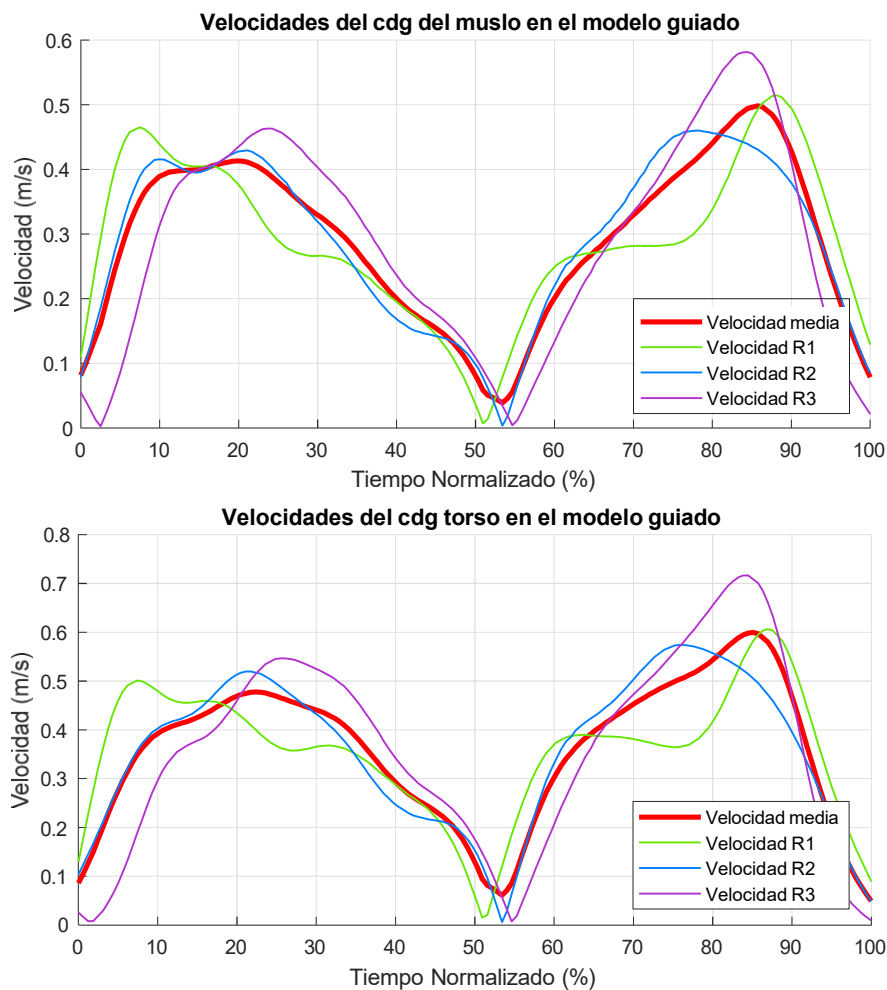


Ilustración 64. Velocidades lineales de los centros de gravedad de cada segmento en cada repetición (R1, R2, R3) junto con la velocidad media de todas las repeticiones para el modelo guiado.

En la Ilustración 65 se representa la gráfica que muestra la velocidad de la barra a lo largo del recorrido del ejercicio. Se aprecian dos picos de velocidad en la barra a lo largo del recorrido, alcanzando en la tercera repetición un valor de 0,65 m/s, valor máximo registrado en la barra. Por otro lado, al igual que en las articulaciones, se observa un valor prácticamente nulo de velocidad en el punto más bajo del recorrido.

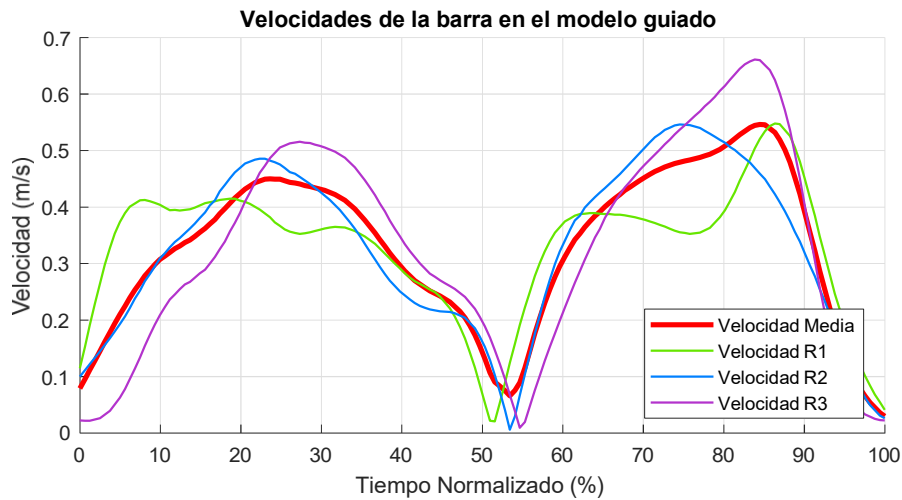
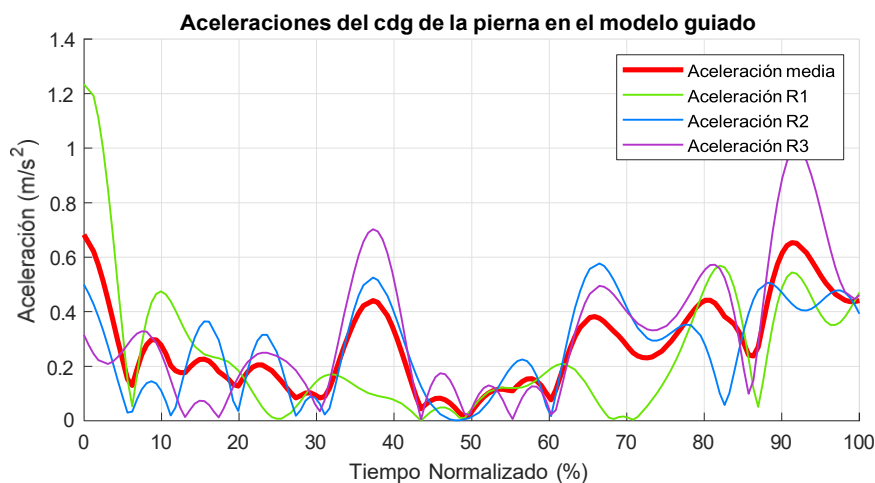


Ilustración 65. Velocidad de la barra en cada repetición realizada y la media de las tres repeticiones en la sentadilla guiada.

4.2.2 Aceleraciones

Las aceleraciones lineales que se muestran en la Ilustración 66 muestran la tendencia de la aceleración en los centros de gravedad de cada segmento. Se observa que las mayores aceleraciones, al igual que en el modelo libre, se alcanzan en el torso al principio de la fase concéntrica. El muslo, de menor masa que el torso, alcanza unas aceleraciones menores en el mismo instante de la fase, a diferencia de la pierna, que denota unas aceleraciones mínimas en toda la fase, hecho que puede derivar de la fijación de la articulación que está en su extremo, a diferencia de los demás segmentos, que sus articulaciones se encuentran libres en ambos extremos.



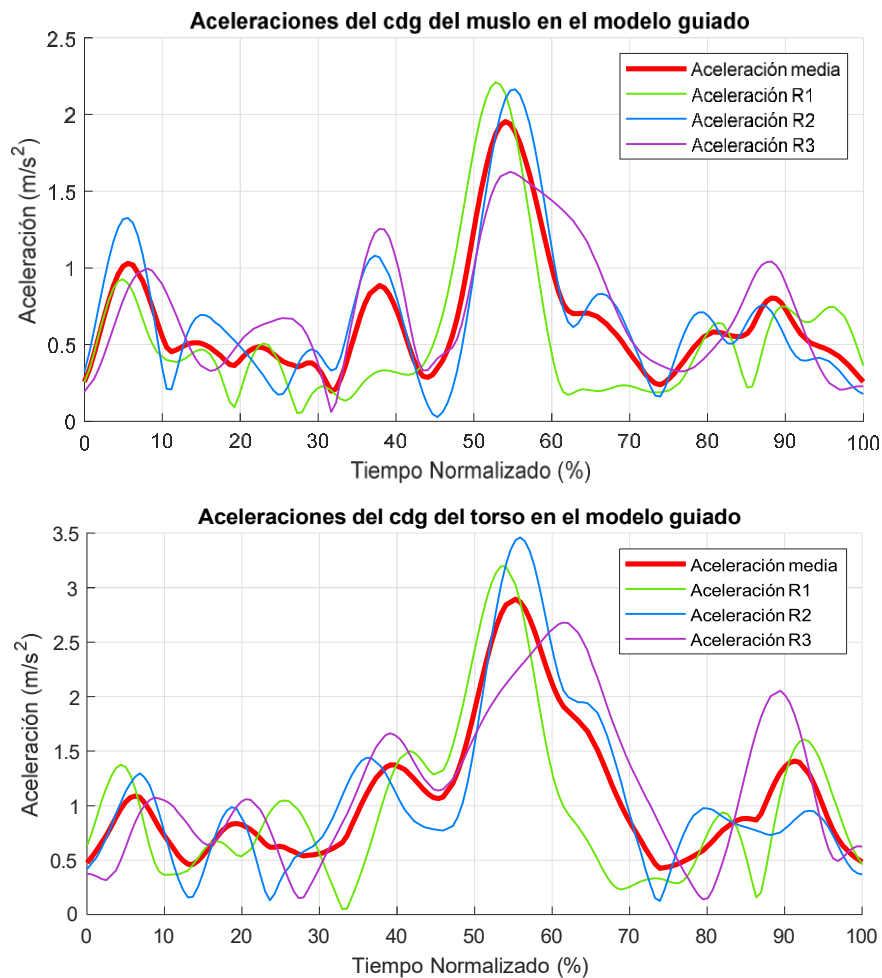


Ilustración 66. Aceleraciones lineales obtenidas en el centro de gravedad de cada segmento para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la aceleración media de todas las repeticiones.

Por otra parte, en la Ilustración 67 se muestra la aceleración de la barra a lo largo de toda la fase. Al igual que en el modelo libre, la aceleración de la barra es máxima donde se registra un cambio de pendiente en la curva de velocidad lineal, es decir, se produce un incremento de la velocidad en un corto período de tiempo. El valor de aceleración máxima se encuentra en el instante isométrico de la fase, donde se alcanza un valor medio de aceleración de $2,74 \text{ m/s}^2$. El valor máximo de aceleración en la barra se registra en la segunda repetición con un valor máximo de $3,26 \text{ m/s}^2$.

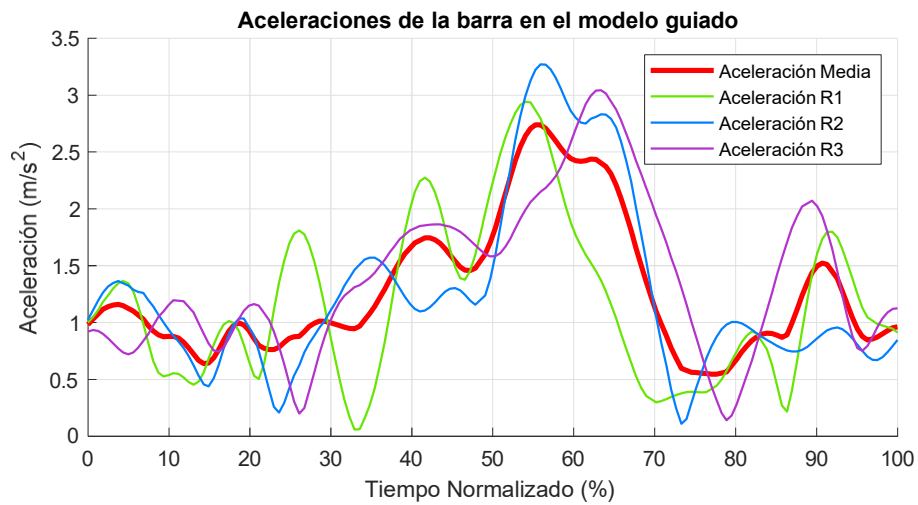
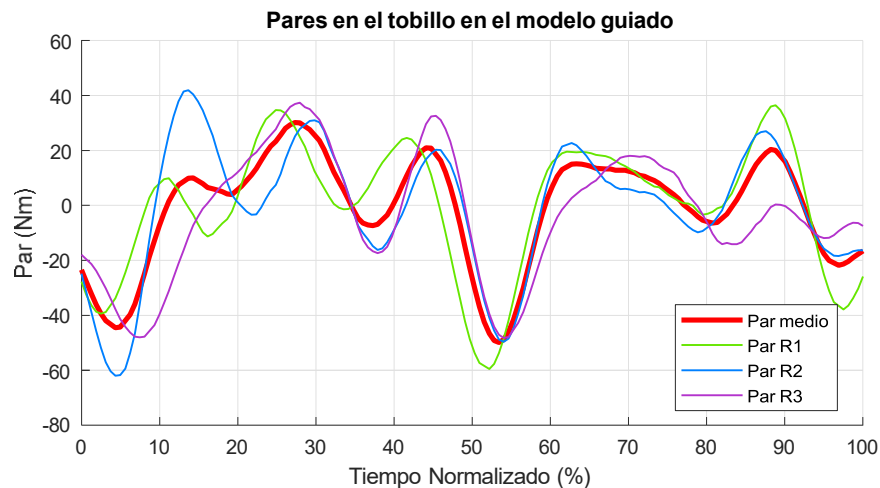


Ilustración 67. Aceleraciones de la barra en cada repetición realizada junto con la media de las tres repeticiones en la sentadilla guiada.

4.2.3 Pares articulares

A continuación, se muestran los pares articulares obtenidos en las articulaciones para el modelo de la sentadilla guiada. A diferencia del modelo libre, para la obtención de los pares articulares en el modelo guiado se ha hecho uso de la lectura de la reacción horizontal obtenida de la plataforma de fuerza para obtener así los pares en el modelo y resolver el problema dinámico.



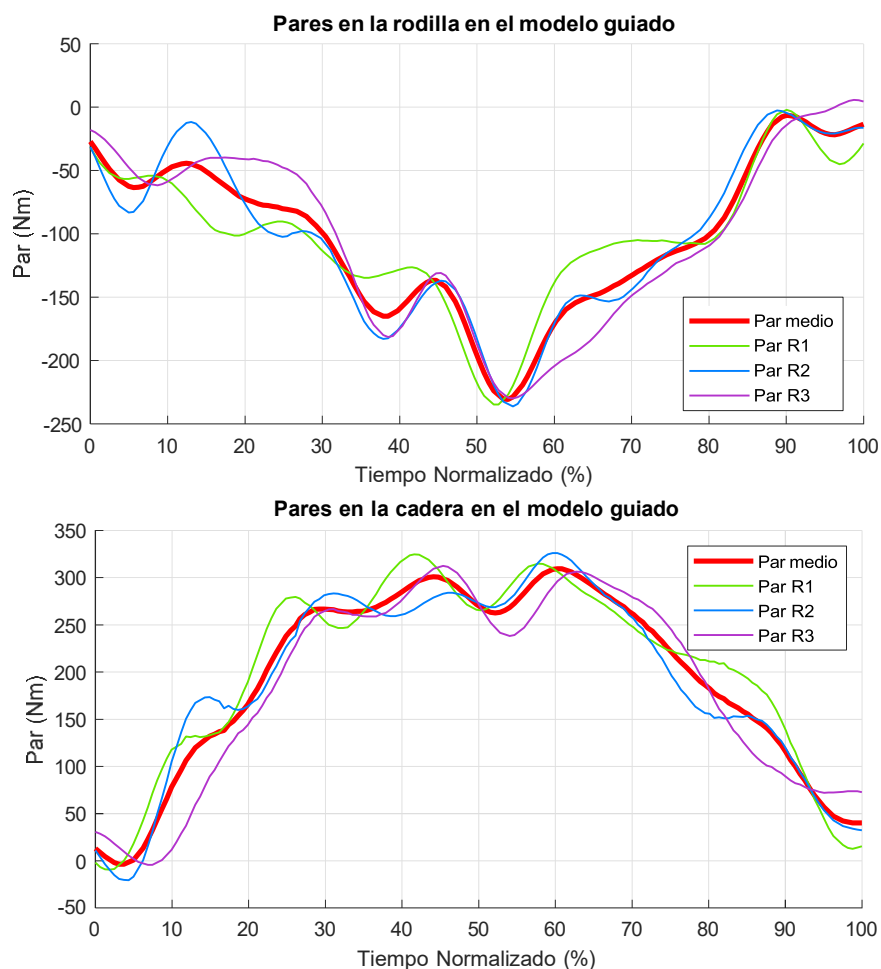


Ilustración 68. Gráficas de los pares articulares obtenidos en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con el par medio de cada repetición para el modelo guiado.

Los pares articulares que se muestran en las gráficas de la Ilustración 68 muestran las curvas de par que cada articulación registra a lo largo del movimiento del ejercicio en el modelo guiado. El valor de par máximo para cada articulación se estudia de igual forma que en el modelo libre, observando todos los valores en la parte isométrica del ejercicio. En la articulación del tobillo se registra un valor medio de par de 49,14 Nm para todas las repeticiones, mientras que el valor máximo alcanzado es de 59,52 Nm en la primera repetición y el mínimo de 44,19 Nm. Por otro lado, la rodilla registra un par medio de 226,819 Nm, siendo el valor mínimo de 223,43 Nm y valor máximo de 234,58 Nm, registrados en la tercera y la primera repetición respectivamente. Finalmente, la cadera es la articulación donde se registran los pares más elevados, obteniendo un valor medio de 263,39 Nm, obteniendo un valor máximo de 278,26 Nm en la primera repetición y de 241,72 Nm en la tercera.

De la misma manera que en el modelo libre, los valores máximos alcanzados en cada articulación no se sitúan en el instante isométrico del ejercicio, sin embargo, en la Ilustración 68 se pueden observar los valores de par máximos generados en cada articulación.

4.2.4 Reacciones en las articulaciones

Las fuerzas internas horizontales (F_x) mostradas en la Ilustración 69 registran en todas las articulaciones unas magnitudes considerablemente pequeñas. Hay que recordar lo planteado en el punto 3.1.1, el modelo guiado se trata de un sistema con dos grados de libertad, pues se restringe un grado de libertad en la barra al actuar como una deslizadera y tratarse de un movimiento guiado en la dirección vertical. Es por ello, que las fuerzas internas de mayor magnitud se van a obtener en el eje vertical. Cabe añadir, que la articulación de la cadera es la que registra valores de fuerza horizontal mayores, mientras que el tobillo y la rodilla obtienen unas reacciones menores y denotan un aumento de la reacción en el punto más bajo del recorrido.

Por otro lado, en la Ilustración 70 se muestran las fuerzas internas verticales (F_y). Gráficamente la respuesta de las tres articulaciones es muy parecida, no obstante, se obtienen valores máximos notoriamente distintos para un mismo instante de la fase isométrica en la segunda repetición, donde el tobillo registra un valor de 1441,69 N, la rodilla de 1370,98 N y la cadera de 1184,47 N. Por otra parte, los valores medios registrados en el mismo instante de la fase, son de 1384,98 N para el tobillo, 1313,84 N para la rodilla y 1132,36 N para la cadera.

Las fuerzas internas medias resultantes se muestran en la Ilustración 71 para el modelo guiado. Se observa una evidente diferencia entre la fuerza interna media vertical y la fuerza interna media horizontal para cada articulación, pues la fuerza interna horizontal para todas las articulaciones tiende a ser nula para toda la fase, lo que afecta a la fuerza resultante de ambas, que refleja unos valores que siguen la misma curva de forma idéntica a la fuerza interna media vertical. Con estos resultados se puede observar que la fuerza interna horizontal en las articulaciones para el modelo guiado no tiene ninguna influencia sobre la fuerza total resultante.

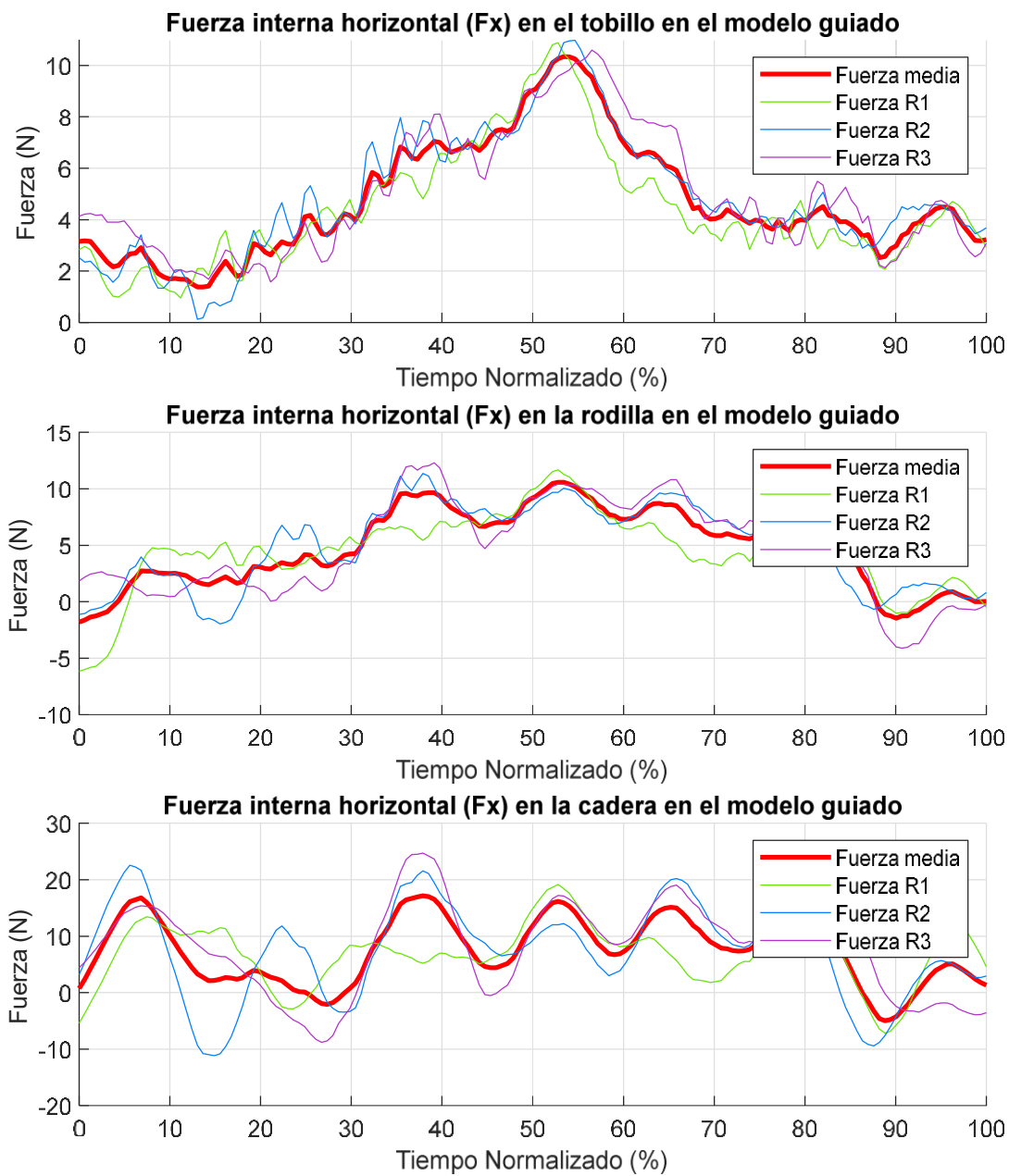


Ilustración 69. Conjunto de las fuerzas horizontales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la fuerza media de todas las repeticiones.

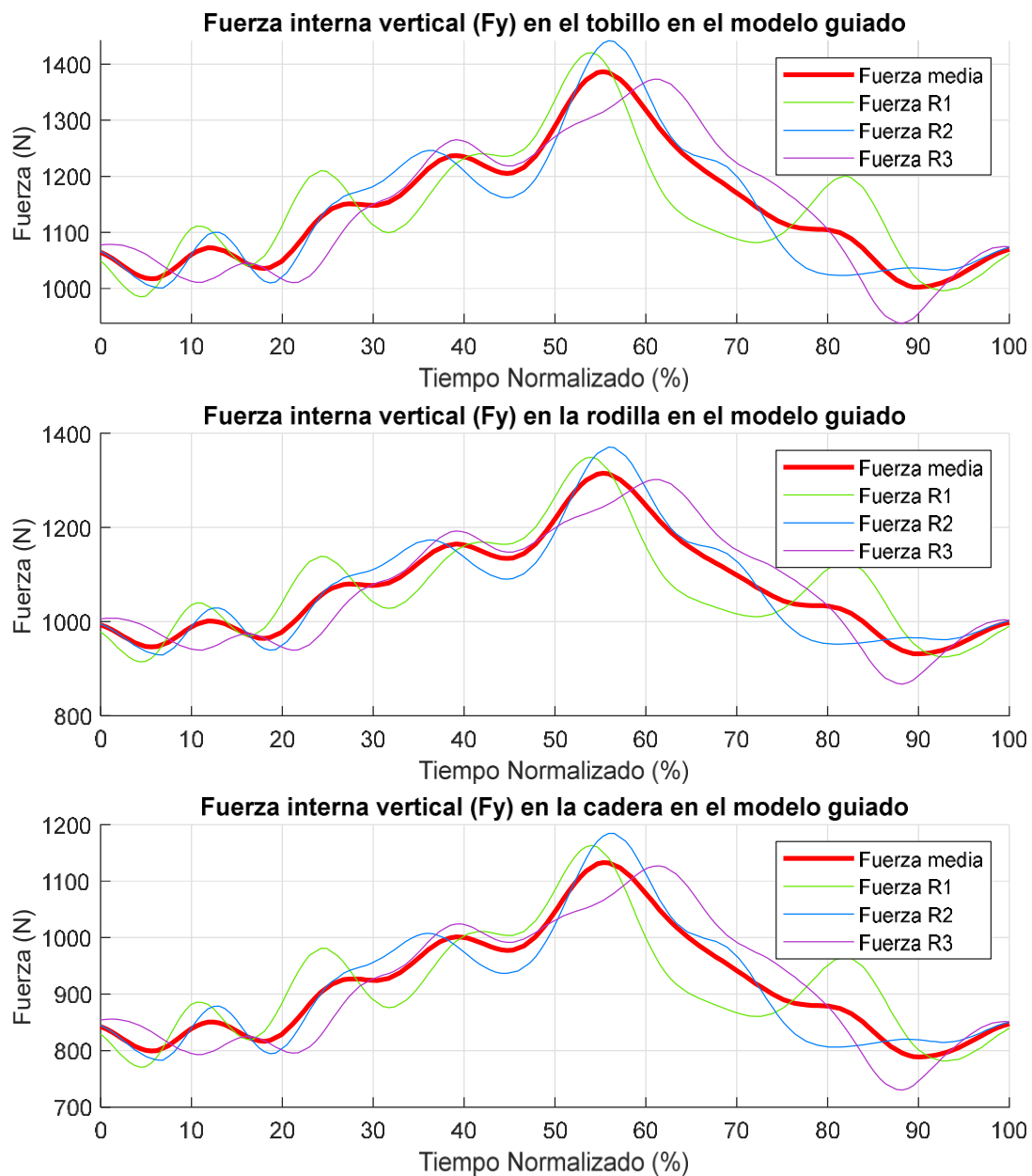


Ilustración 70. Conjunto de las fuerzas verticales obtenidas en las articulaciones para cada repetición (R1, R2, R3) junto con la fuerza media de todas las repeticiones.

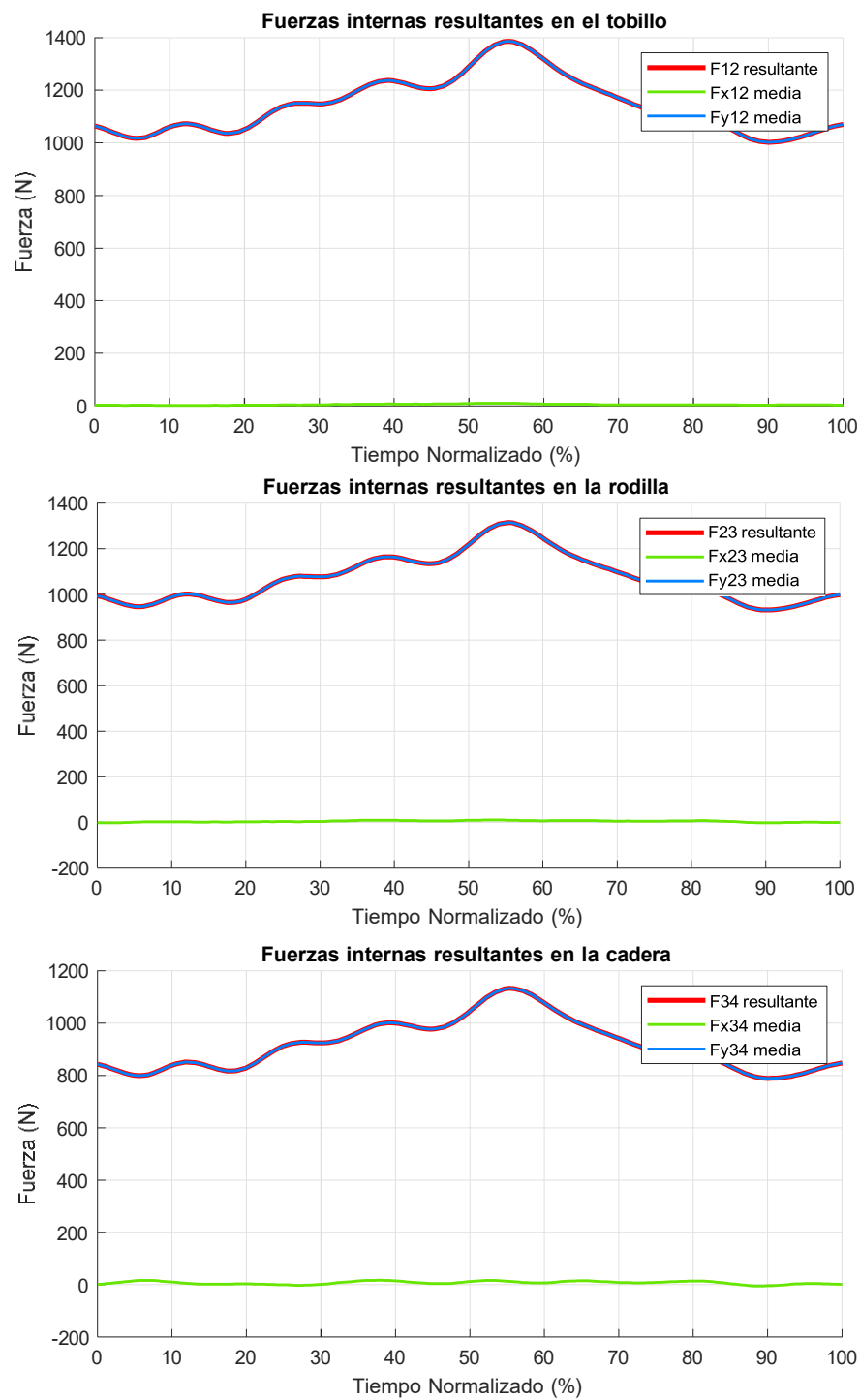


Ilustración 71. Fuerzas internas medias resultantes en cada articulación frente las obtenidas en el eje vertical y horizontal.

4.2.5 Reacción en el suelo

Como se ha comentado en el punto 4.2.4, las fuerzas horizontales obtenidas en el modelo tienen un valor muy bajo, lo que hace que en la plataforma de fuerza resulte como una línea de fuerza estable que tiende a 0 N a lo largo del tiempo. La Ilustración 72 muestra las fuerzas verticales registradas en la plataforma de fuerza para cada instante de tiempo en las tres repeticiones, frente a las obtenidas por el modelo planteado para la sentadilla guiada (F_{Y12}).

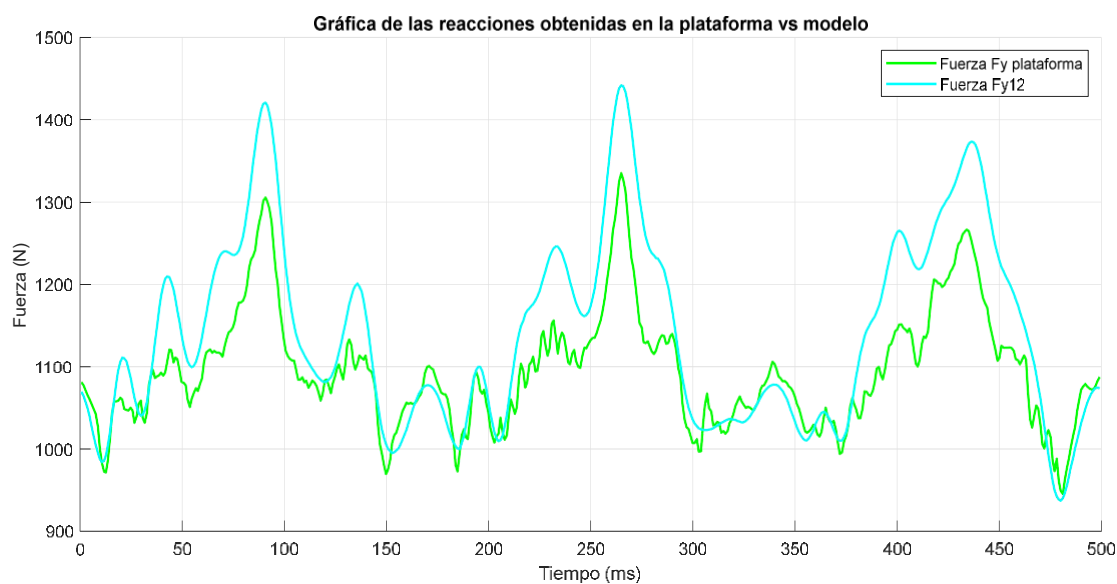


Ilustración 72. Gráfica de la fuerza registrada en la plataforma frente al valor de fuerza obtenida mediante la dinámica del modelo guiado.

El resultado obtenido para el modelo guiado teórico tiene una tendencia que se adapta de forma gráfica al resultado real de la plataforma. Al igual que en el modelo libre, el conjunto de datos del modelo planteado se sitúa ligeramente por encima de los resultados de la plataforma. De todas formas, se realiza la misma operación que en el modelo libre para validar el modelo y comprobar que la curva del modelo teórico se adapta a la realidad. El factor de correlación obtenido entre ambas curvas es de 0,9485276, factor próximo a 1, lo que significa una muy buena correlación entre una curva teórica y una curva real.

4.3 Análisis comparativo de resultados entre los dos modelos

El principal pilar de estudio de este trabajo es la comparativa entre la sentadilla guiada y la libre. En este punto se va a analizar las diferencias existentes entre un tipo de ejercicio y el otro. Los principales factores que se van a analizar en la comparativa es la estabilidad de ambos modelos

a partir del centro de presiones (CoP) en el contacto del pie en el suelo, los pares articulares de ambos modelos y el desplazamiento horizontal que se genera en la ejecución del ejercicio. Se debe considerar que ambos modelos de la sentadilla fueron ejecutados por individuos distintos, por lo cual, los dos sujetos tenían distintas técnicas de ejecución del ejercicio, así como parámetros antropométricos.

- *Centro de presiones (CoP)*

El CoP se encuentra situado en un punto del pie donde existe contacto con el suelo, ubicado a una distancia del tobillo que va cambiando a lo largo del ciclo del ejercicio. En la Ilustración 73 se muestra la variación existente en el CoP que se genera a lo largo de la ejecución de la sentadilla. Para obtener de la distancia horizontal a la que se encuentra el CoP del tobillo, se han empleado dos métodos distintos, el modelo teórico y la plataforma de fuerza.

En el primero, se realiza un sumatorio de momentos desde el tobillo y el propio CoP (los momentos que se generan en ese punto son nulos), obteniendo la distancia y la fuerza de reacción en el suelo, mostradas en la ecuación (128) y (130), respectivamente. Para el sumatorio de momentos del tobillo, se ha considerado la distancia del tobillo al suelo en el plano vertical según los parámetros antropométricos planteados por Contini [16], representados en la Ilustración 24.

En segundo lugar, el otro método empleado para la obtención de la variación del CoP es mediante las fuerzas registradas por las células de carga en las esquinas de la plataforma de fuerza, representada en la Ilustración 48.

Los dos métodos planteados para la obtención del CoP han sido representados en la Ilustración 73, la cual muestra la variación del CoP para el modelo guiado y el modelo libre, según el planteamiento teórico o el uso de la plataforma de fuerza. Con este planteamiento, se resuelve la incógnita de cómo afecta la estabilidad en cada modelo, comparando el desplazamiento existente en el modelo guiado y en el libre. La diferencia que se obtiene en el modelo guiado y el modelo libre es sumamente alta, es tal así que en el modelo libre el CoP se desplaza hasta los 30,38 cm del tobillo en el planteamiento teórico y 29,30 cm en el estudio con la plataforma de fuerza, mientras que en el modelo guiado el CoP alcanza una distancia máxima de 3,06 cm y 4,51 cm, respectivamente. En el instante donde el cuerpo se encuentra en la fase isométrica, existe cierta similitud entre ambos modelos, lo que indica una posición parecida del CoP para ambos ejercicios en ese instante.

Con esta representación del CoP en el modelo libre y guiado se puede indicar que el modelo guiado obtiene una estabilidad mayor que en el modelo libre, lo que hace que el ejercicio se ejecute de manera más equilibrada, con un recorrido que no se ve tan afectado por las perturbaciones externas al movimiento.

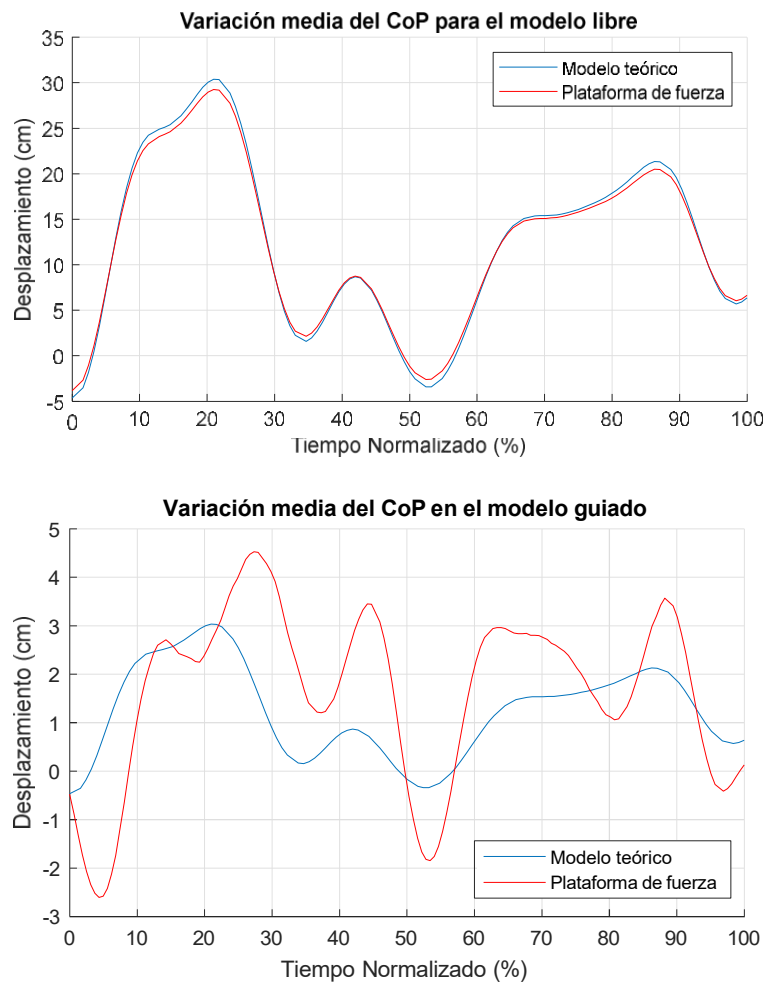


Ilustración 73. Variación del CoP anterior-posterior a lo largo del ejercicio de la sentadilla para el modelo libre y guiado.

A continuación, en la Ilustración 74 se muestra la fuerza resultante que se genera en el CoP para el modelo guiado y el modelo libre. Esta es la fuerza que resulta de la reacción del suelo (F_{GR}) y de la reacción horizontal (F_x) en ese mismo punto.

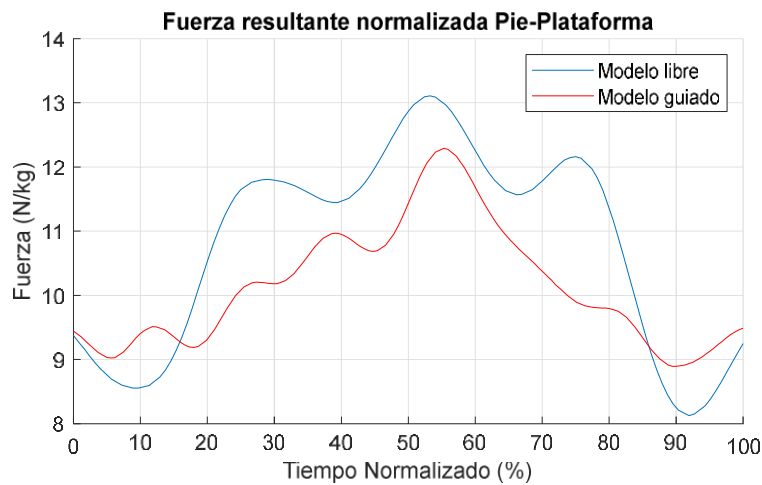


Ilustración 74. Fuerza resultante en el contacto del pie con la plataforma de fuerza.

En la Ilustración 74 se muestra la fuerza resultante normalizada del contacto del pie con la plataforma de fuerza, es decir, no se consideran las fuerzas externas del peso de la barra y del sujeto. La tendencia de ambos modelos tiene un carácter semejante. El modelo libre alcanza una fuerza mayor en el instante isométrico del ejercicio, mientras que el modelo guiado se sitúa ligeramente por debajo. Las fuerza máxima alcanzada es de 13,10 N/kg para el modelo libre y de 12,28 N/kg para el modelo guiado.

- Pares articulares

Uno de los puntos más importantes del estudio es la obtención de los pares articulares. Al tratarse de ejercicios con pesos distintos en el total de la suma de la barra y el sujeto, se ha realizado la obtención de pares normalizados, dividiendo el valor total del par obtenido para cada articulación entre la suma de la masa de la barra más el del sujeto.



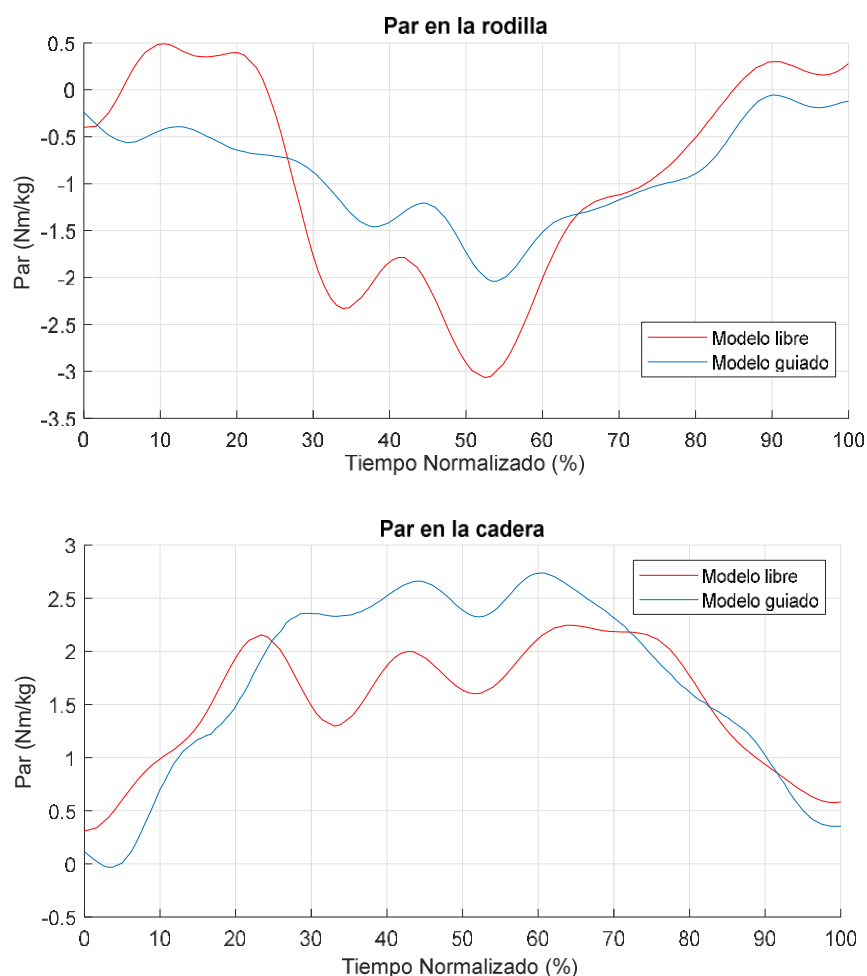


Ilustración 75. Pares normalizados medios de las tres repeticiones para el modelo guiado y libre. La gráfica se muestra frente al tiempo normalizado del ciclo del ejercicio frente al par normalizado.

En la se muestran los máximos de los pares articulares normalizados graficados en la Ilustración 75 en el instante isométrico de las tres repeticiones obtenidos para el modelo libre y el modelo guiado.

	Pares articulares en el instante isométrico	
	Modelo libre [Nm/kg]	Modelo guiado [Nm/kg]
Tobillo (Ankle)	0,34	0,43
Rodilla (Knee)	3,06	2,04
Cadera (Hip)	1,66	2,33

Tabla 10. Comparación de pares normalizados en el modelo libre y guiado.

En los resultados que se muestran en la se observan las diferencias existentes en los pares de las articulaciones de ambos modelos. La articulación del tobillo muestra cierta similitud en el instante isométrico, por el contrario, a lo largo del ciclo del ejercicio del modelo libre que se observa en la Ilustración 75, muestra una respuesta con mayor alteración del par articular frente al modelo guiado. Por otro lado, el par de la rodilla y la cadera son las que denotan unos pares con mayor diferencia entre ellos en el instante isométrico.

- Desplazamiento horizontal

Además del centro de presiones para el estudio de la estabilidad en ambos modelos, también es de interés comparar y observar la estabilidad mediante el desplazamiento horizontal que existe en ambos modelos. En el modelo guiado con la máquina Smith no existe desplazamiento horizontal, es nulo ya que se trata de una barra unida a una deslizadera mediante una soldadura de hierro fija, lo que imposibilita el movimiento en dicha dirección. Por el contrario, en el modelo libre, al tratarse de un movimiento con tres grados de libertad, el punto de apoyo de la barra se desplaza a lo largo del movimiento en el plano horizontal.

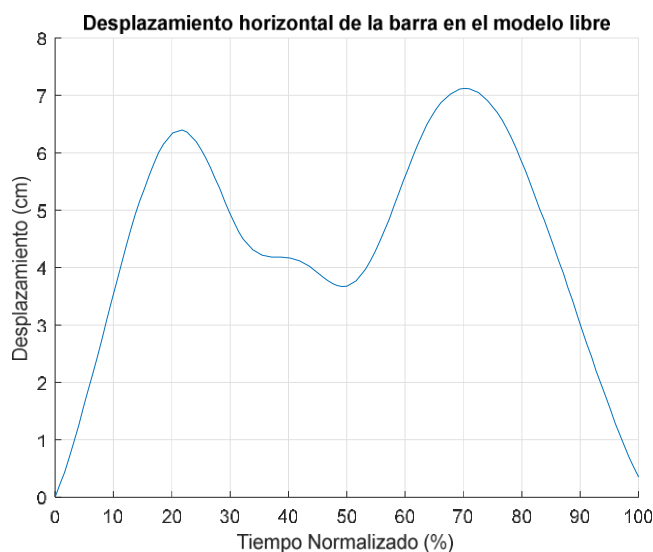


Ilustración 76. Desplazamiento horizontal de la barra libre medio de las 3 repeticiones realizadas.

En la Ilustración 76 se observa como en el cambio de fase excéntrica a concéntrica la barra tiende a disminuir el desplazamiento horizontal. Es en el ascenso de la fase concéntrica cuando el sujeto tiende a empujar el cuerpo hacia arriba y el torso (la barra está sujeta a los hombros, zona superior del torso) se desplaza ligeramente unos centímetros hacia delante, alcanzando un valor máximo de desplazamiento en horizontal de 7,1 cm.

Para concluir los parámetros obtenidos, analizando de forma objetiva el estudio realizado, los resultados son los que se han mostrado. Para obtener un mayor contraste de los resultados en el siguiente punto se va a realizar una comparativa con la documentación que haya sido reportada por otras investigaciones.

4.4 Comparativa con bibliografía

4.4.1 Modelo libre

En este punto se va a realizar una comparativa de los resultados obtenidos en la sentadilla libre con artículos documentados de estudios biomecánicos. En primer lugar, los valores obtenidos van a ser contrastados con el modelo de sentadilla libre realizado por Paul A. Swinton et al. [20].

	Traditional	Powerlifting	Box
30% 1RM			
Moment arms (cm)			
L5/S1	23.5 ± 3.0*	22.9 ± 2.6†	18.2 ± 2.3*†
Hip	26.6 ± 2.7*	26.1 ± 2.1†	21.1 ± 2.2*†
Knee	-9.1 ± 1.8*‡	-7.5 ± 1.2†‡	-13.9 ± 1.9*†
Ankle	10.1 ± 2.0*‡	5.3 ± 1.0†‡	2.5 ± 1.7*†
Moments (Nm)			
L5/S1 (ext)	266 ± 36*‡	222 ± 21‡	203 ± 19*
Hip (ext)	200 ± 26‡	222 ± 29†‡	193 ± 28†
Hip (abd)	58 ± 18‡	75 ± 25‡	64 ± 28
Hip (int rotation)	35 ± 16‡	48 ± 18†‡	26 ± 10†
Knee (ext)	166 ± 28*	161 ± 24†	197 ± 28*†
Ankle (ext)	82 ± 15*‡	56 ± 8†‡	41 ± 11*†
50% 1RM			
Moment arms (cm)			
L5/S1	22.6 ± 2.3*	21.9 ± 2.2†	18.3 ± 2.6*†
Hip	25.9 ± 2.5*	25.8 ± 2.4†	21.3 ± 2.8*†
Knee	-10.5 ± 1.9*‡	-8.0 ± 1.4†‡	-14.7 ± 2.1*†
Ankle	9.5 ± 1.8*‡	5.6 ± 1.5‡	2.5 ± 2.1*
Moments (Nm)			
L5/S1 (ext)	320 ± 42*‡	261 ± 30‡	233 ± 21*
Hip (ext)	240 ± 29*	253 ± 33†	213 ± 35*†
Hip (abd)	63 ± 29‡	84 ± 27‡	69 ± 35
Hip (int rotation)	42 ± 24	50 ± 19†	26 ± 17†
Knee (ext)	188 ± 32*	176 ± 27†	221 ± 29*†
Ankle (ext)	93 ± 17*‡	64 ± 16‡	58 ± 15*
70% 1RM			
Moment arms (cm)			
L5/S1	22.1 ± 2.5*	22.4 ± 2.3†	19.7 ± 2.8*†
Hip	25.2 ± 2.9	26.2 ± 2.1†	23.3 ± 3.0†
Knee	-10.1 ± 1.1*‡	-8.1 ± 0.8†‡	-15.2 ± 2.8*†
Ankle	9.9 ± 2.2*	5.6 ± 1.6	2.4 ± 2.1*
Moments (Nm)			
L5/S1 (ext)	354 ± 49*‡	308 ± 39‡	279 ± 35*
Hip (ext)	256 ± 35*‡	281 ± 32†‡	230 ± 37*†
Hip (abd)	70 ± 30‡	94 ± 26‡	79 ± 35
Hip (int rotation)	43 ± 24	55 ± 22	38 ± 28
Knee (ext)	201 ± 39	192 ± 36	229 ± 39
Ankle (ext)	104 ± 20*‡	78 ± 10‡	71 ± 14*

*Significant difference between traditional and box ($p < 0.05$).
†Significant difference between powerlifting and box ($p < 0.05$).
‡Significant difference between traditional and powerlifting ($p < 0.05$).

Tabla 11. Tabla de momentos máximos en las articulaciones planteados por Paul A. Swinton et al. [20].

En la Tabla 11 aparecen representados los momentos en Nm de las principales articulaciones para las modalidades de la sentadilla tradicional, de powerlifting y en caja. Se toman los valores para el 30%, 50% y 70% de 1RM de la sentadilla tradicional. Al desconocer el valor de 1RM del

atleta que realizó la prueba en el modelo de sentadilla libre, se van a comparar los tres valores con el estudio.

	Comparativa de resultados de par del modelo libre vs resultados del estudio de Paul A. Swinton			
	Modelo libre	30% 1RM	50% 1RM	70% 1RM
Tobillo (Ankle)	35,67 [Nm]	82 [Nm]	93 [Nm]	104 [Nm]
Rodilla (Knee)	318,132 [Nm]	166 [Nm]	188 [Nm]	201 [Nm]
Cadera (Hip)	166,854 [Nm]	200 [Nm]	240 [Nm]	256 [Nm]

Tabla 12. Comparativa de los valores de par obtenidos en el modelo de la sentadilla libre en el punto 4.1.3 con los resultados de par obtenidos en el estudio de Paul A. Swinton et al. [20] para el 30%, 50% y 70% de 1 RM.

En la Tabla 12 se muestra la comparativa realizada con los resultados obtenidos en el estudio de la sentadilla libre en el apartado 754.1.3 con los comparados del estudio Paul A. Swinton et al. [20]. Las conclusiones objetivas de la comparativa son evidentes, existe una diferencia notable entre los resultados del modelo con la bibliografía. Analizando de forma más concreta, observando el resultado para el 30% de 1RM, se muestra una aproximación en los valores de la cadera y el tobillo, pudiéndose deber la diferencia obtenida al peso y altura del sujeto analizado, aproximaciones de datos en el modelo, aceleraciones, filtrado de datos, inercias, etc. Por otro lado, la rodilla es la articulación con una mayor diferencia de pares obtenidos entre un estudio y otro. En conclusión, existen diversos factores que pueden afectar a los resultados y que, para concluir y obtener una respuesta a las investigaciones, se debería ampliar el estudio y analizar en mayor profundidad la disparidad obtenida en los datos.

En segundo lugar, otra referencia para el modelo libre es el análisis biomecánico planteado por Mitja GERŽEVIČ et al. [21] en el cual se realiza un estudio en sentadilla libre con un atleta de 1,80 cm y 76 kg. El planteamiento del estudio consiste en obtener la diferencia existente entre los pares que se producen al realizar una sentadilla con barra alta o barra baja (*high-bar back squat (HBS)* y *high-bar back squat (LBS)*). La comparativa entre el estudio realizado en la Universidad de Primorskav y los resultados obtenidos del modelo para la sentadilla libre se centran en el par obtenido en la rodilla para el punto más bajo del recorrido (cambio de fase excéntrica a concéntrica). La comparación se realiza con el modelo de HBS, ya que es el tipo de ejercicio que se ha realizado.

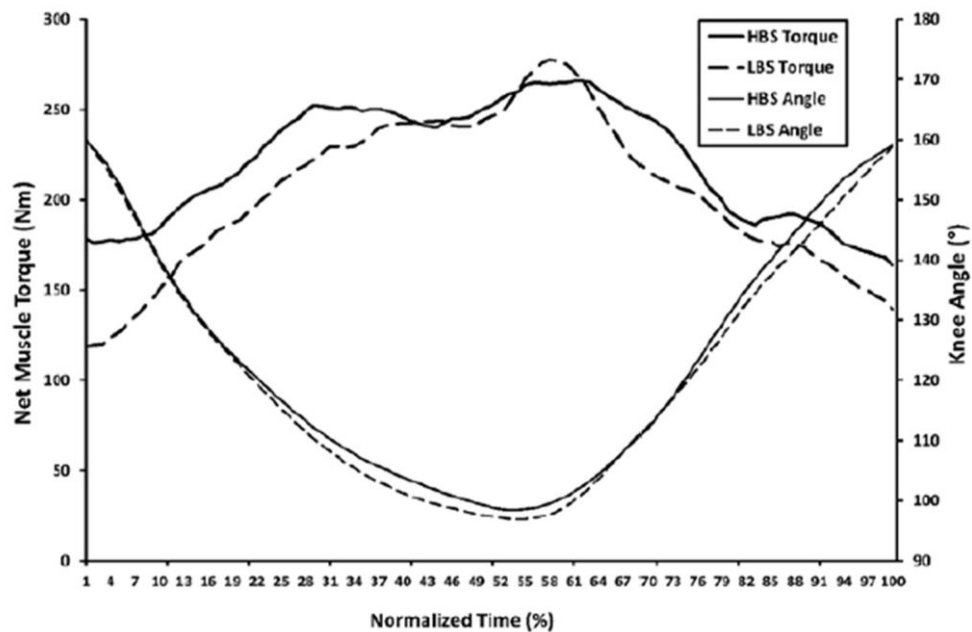


Ilustración 77. Gráfica del par de la rodilla para barra alta (*high-bar back squat (HBS)*) y barra baja (*high-bar back squat (LBS)*) frente al ángulo de la rodilla y el porcentaje de tiempo del ciclo del ejercicio [21].

A continuación, en la Tabla 13 se muestran los valores de par más elevados en la articulación de la rodilla.

	Comparativa sentadilla libre	
	Modelo libre	Estudio para HBS
Rodilla (Knee)	318,132 [Nm]	265 [Nm]

Tabla 13. Resultados del modelo de la Universidad de Primorskav y el modelo planteado para el estudio de la sentadilla libre.

Los resultados en ambos modelos tienen una lejanía notable en la magnitud de los mismos, sin embargo, cada estudio ha estado realizado por un sujeto distinto, si bien los ángulos en el recorrido son muy similares, los parámetros del sujeto (peso y altura) desvarían entre ambos. Dicho esto, a pesar de las diferencias existentes, el resultado obtenido para la sentadilla libre en comparación con el modelo planteado por la universidad eslovena, es un valor que se puede plantear su validez, a pesar de existir una diferencia que requiera un estudio en mayor profundidad.

4.4.2 Modelo guiado

Para el modelo guiado se va a realizar una comparativa con dos modelos planteados por Andrea Biscarini et al., uno en el cual se analiza una sentadilla similar a la guiada en la cual la espalda se

apoya en una superficie plana, actuando de deslizadera, similar a la máquina Smith [22]. Por otro lado, otro ensayo sobre un modelo guiado en la máquina Smith planteado de la misma manera que el modelo realizado en el apartado 3.3.1 con la diferencia que se considera un único centro de gravedad para todo el cuerpo, sin considerar centros de gravedad para cada segmento de forma independiente [10].

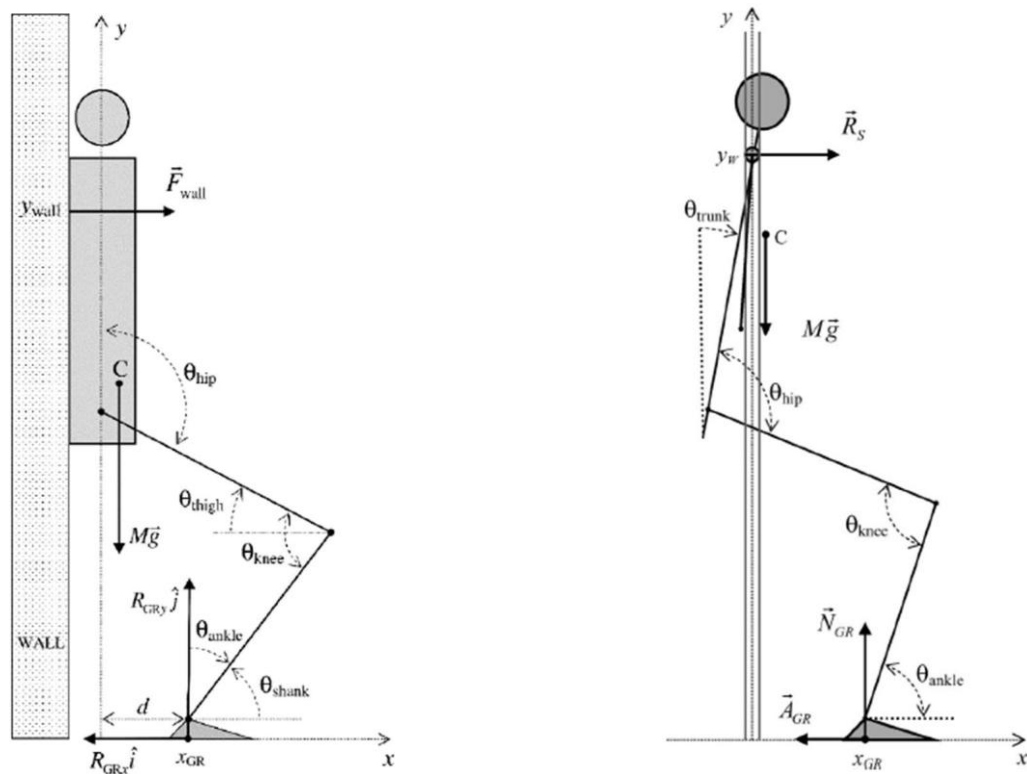


Ilustración 78. Los dos modelos planteados por Andrea Biscarini et al. sobre la sentadilla guiada. Izquierda: modelo 'Wall Squat' planteado por Biscarini et al. (2020) [22]. Derecha: modelo de sentadilla guiada en máquina Smith planteado por Biscarini et al. (2011) [10].

En primer lugar, analizando el modelo de 'Wall Squat' cabe destacar que el par de la cadera va a ser menor, pues está sujeta con el torso en la pared, formando un sólido rígido que se desliza por la pared. Además, en ese modelo planteado no se van a considerar las fuerzas externas de la barra, pues se trabaja con el peso del sujeto. El estudio se realizó con seis personas distintas, de 71 ± 11 kg y $1,74 \pm 0,08$ m. Los pares resultantes en el estudio son los que aparecen en la Ilustración 79.

Torque Type	Maximum Torque	Conditions for Maximum Torque				Peak Isokinetic Torque of Males (Females)
		Knee Angle	Distance <i>d</i>	Type of Support	Body Weight at Forefoot/Rearfoot	
Hip extension torque	130 Nm	80°	50 cm	scapular	forefoot	177 Nm (110 Nm)
Knee extension torque	250 Nm	80°	50 cm	pelvic	forefoot	268 Nm (176 Nm)
Knee flexion torque	65 Nm	0°	50 cm	scapular	forefoot	171 Nm (110 Nm)
Ankle plantar-flexion torque	40 Nm	0°	50 cm	scapular/pelvic	forefoot	171 Nm (108 Nm)
Ankle dorsi-flexion torque	40 Nm	80°	20 cm	pelvic	rearfoot	33 Nm (26 Nm)

Ilustración 79. Pares resultantes del modelo 'Wall Squat' [22].

Los resultados obtenidos frente al modelo guiado estudiado en el apartado 3.4.1 se comparan en la Tabla 14.

	Comparativa 'Wall Squat'	
	Modelo guiado	Modelo 'Wall Squat'
Tobillo (Ankle)	49,85 Nm	40 Nm
Rodilla (Knee)	230,527 Nm	250 Nm
Cadera (Hip)	265,43 Nm	130 Nm

Tabla 14. Comparativa de pares del ensayo de Biscarini et al. [22] con el modelo 'Wall Squat' frente los resultados de par del modelo guiado.

De los resultados de ambos modelos se observa una similitud en el tobillo y la rodilla, obteniendo unos valores de par muy similares en ambos ejercicios. Por lo contrario, en la cadera, como anteriormente se ha dicho, es una articulación que no queda libre en el espacio como en el modelo guiado, por lo tanto, la diferencia es notable, siendo mucho menor el par obtenido en el modelo de 'Wall Squat'.

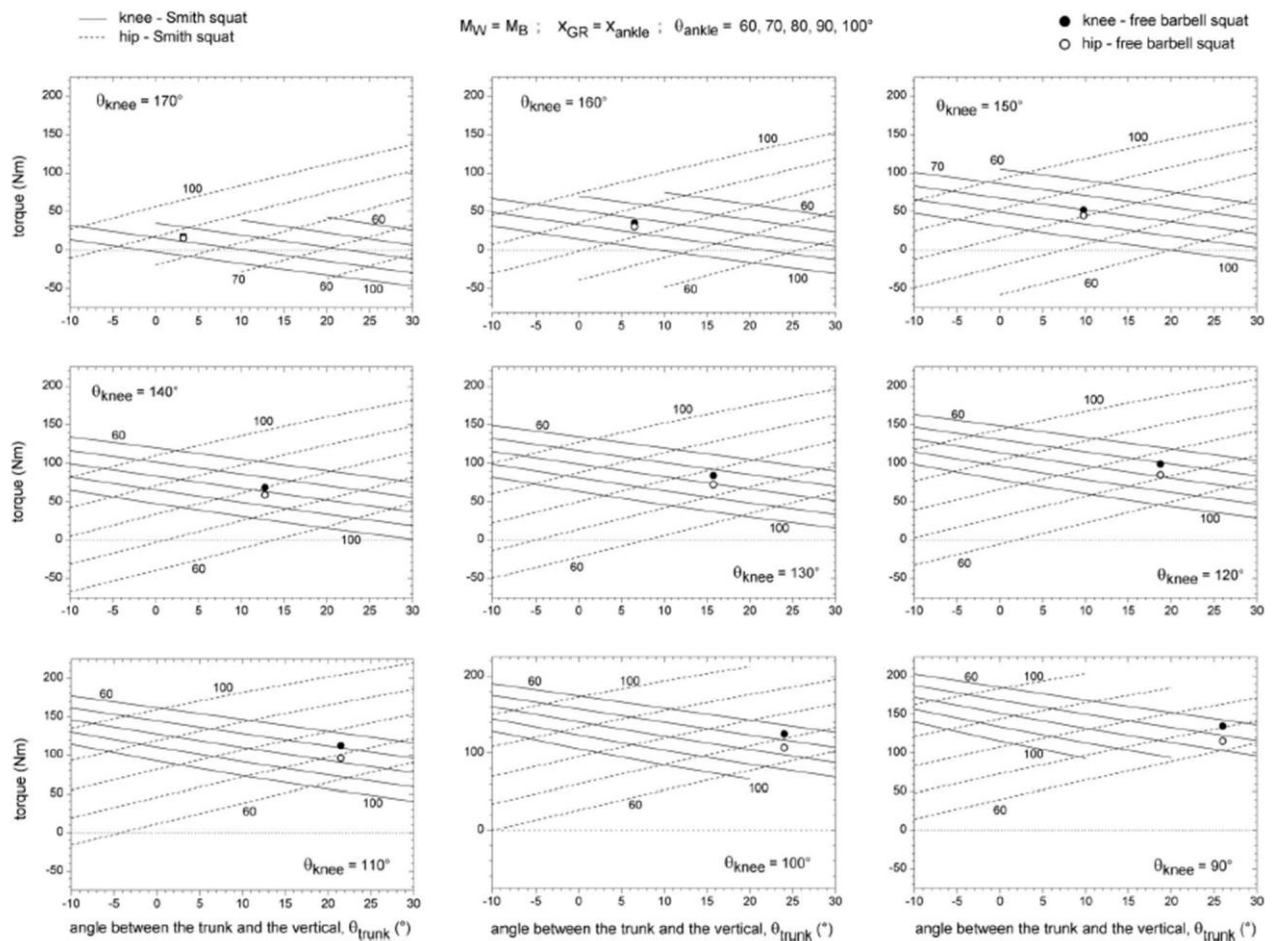


Ilustración 80. Dependencia de los pares de la rodilla y la cadera en la inclinación del tronco para diferentes valores del ángulo de la rodilla obtenidos en el ensayo de Biscarini et al. para la sentadilla guiada en máquina Smith [10]. Cada gráfica se representa para un ángulo de la rodilla, desde los 170° hasta los 90°.

Para analizar las diferencias existentes en el par de la sentadilla guiada analizada en el estudio frente los resultados obtenidos en el artículo de Biscarini et al. [10], se observarán los valores dónde el ángulo de la rodilla sea mínimo, es decir, en la parte más baja del recorrido, pues el ángulo que mide la rodilla en la Ilustración 78 se muestra en el interior, por lo tanto, el ángulo más pequeño será el que defina la posición más baja.

	Comparativa máquina Smith	
	Modelo guiado del estudio	Modelo guiado de Biscarini
Rodilla (Knee)	230,527 Nm	135 Nm
Cadera (Hip)	265,43 Nm	140 Nm

Tabla 15. Tabla comparativa entre los resultados de par obtenidos en el ensayo guiado frente los datos aproximados de par en el ensayo de Biscarini et al. [10].

En la Tabla 15 se muestran los resultados obtenidos en el modelo guiado y en el modelo de Biscarini et al. [10]. El principal factor que determina el valor distante del par existente en el modelo planteado en este estudio frente al analizado por Biscarini es el peso añadido a la barra, pues en el modelo planteado para el sistema guiado en este análisis se ha realizado con un peso total de la barra de 40 kg, frente al peso nulo que se considera en el modelo de Biscarini, es decir, solo se considera el peso del sujeto deslizándose de forma vertical, sin considerar el peso de la barra. De todas formas, los valores representados en la Tabla 15 son tomados para un ángulo de torso de aproximadamente 30° y un ángulo de tobillo de 70°, pues son los valores de posición en el punto más bajo del recorrido, lo que indica que aun trabajando sin peso añadido, la cadera obtiene unos valores de par ligeramente superiores cuanto mayor es el ángulo del torso, es decir, los resultados del ensayo en la sentadilla guiada, a pesar de no poderse contrastar con exactitud con la bibliografía existente, toman cierto sentido en la interpretación de los mismos.

5. Conclusiones

Los objetivos planteados para este Trabajo de Fin de Grado de tipo experimental han sido alcanzados durante la realización del proyecto. El análisis biomecánico realizado para el ejercicio de la sentadilla libre y guiada ha permitido obtener los dos modelos matemáticos sobre los cuales se ha trabajado. De esta manera, gracias a los modelos planteados, se ha podido llevar a cabo la realización de los subobjetivos, donde se ha definido la cinemática completa (posición, velocidad y aceleración) y la dinámica para cada modelo, así como se han obtenido los parámetros necesarios para realizar una comparativa entre ambas modalidades.

En primer lugar, cabe destacar las diferencias del modelo matemático planteado frente al modelo sobre el cual se ha referenciado este proyecto. En el modelo estudiado se ha trabajado con tres centros de gravedad, uno en cada sólido rígido planteado para los segmentos del cuerpo humano.

La fiabilidad del modelo se analiza a partir de los resultados obtenidos y de la validación realizada, donde se comparan las fuerzas que se han obtenido en el modelo guiado y en el libre frente las obtenidas en los registros de la plataforma de fuerza. Para el modelo guiado se obtiene una correlación entre la curva de fuerza del modelo teórico y la de la plataforma de fuerza de 0,95, mientras que en el modelo libre esta correlación es de 0,90. Ambos valores son cercanos a 1, lo que indica que existe una proximidad significativa entre el planteamiento teórico y las fuerzas registradas por las células de carga de la plataforma.

En otro orden, los principales factores que definen los modelos, son las variables cinemáticas y dinámicas. Es en los parámetros de las velocidades y aceleraciones, donde existen las principales diferencias entre ambos. La velocidad de la barra en el modelo libre alcanza unos valores máximos ligeramente superiores al modelo guiado, lo mismo ocurre con las aceleraciones para la barra en el modelo libre, donde alcanza unas aceleraciones de mayor magnitud, lo que se traduce en un mayor control en el movimiento del modelo guiado frente al libre.

Otro de los factores más importantes en el análisis de los modelos son los pares en las articulaciones. Los pares han sido normalizados para que el peso externo (peso de la barra y del usuario) no afecte a la comparativa. Los resultados alcanzados han sido determinantes en la rodilla y la cadera, donde existe una variación importante en ambos modelos. Este factor indica el esfuerzo que se realiza en cada articulación a lo largo del ejercicio, obteniendo un mayor par en la articulación de la rodilla para el modelo libre, y en la cadera para el modelo guiado. Estos resultados indican la diferencia existente en ambos modelos según el estudio realizado y el peso con el que se ha trabajado, es tal así, que en el modelo libre se sufre un mayor par en la rodilla, mientras que en el modelo guiado se concentra en la cadera.

Siguiendo con la comparativa realizada, la estabilidad es otro de los factores que pueden ser determinantes a la hora de optar por realizar una modalidad u otra. En este estudio se ha

planteado analizar la estabilidad a partir del centro de presiones (CoP) en el pie y a través del desplazamiento horizontal de la barra. Se ha observado que la variación del CoP en el pie era mayor para el modelo libre que para el modelo guiado, proporcionando una estabilidad mayor en el apoyo con el suelo, lo que brinda al usuario una mayor seguridad en la ejecución del ejercicio con la máquina Smith.

Por otro lado, siguiendo con el estudio de estabilidad en el ejercicio, el modelo guiado no tiene ningún tipo de desplazamiento horizontal en la barra, mientras que en el modelo libre existe un desplazamiento máximo de 7,1 cm, lo que produce una inestabilidad en la parte alta del cuerpo, llevando el centro de gravedad del cuerpo ligeramente hacia delante, hecho que puede generar inestabilidades.

Cabe añadir, que la comparativa bibliográfica que se ha planteado ha proporcionado unos valores orientativos sobre los resultados obtenidos en este estudio, pudiendo referenciar las magnitudes de los valores alcanzados y, observar así, si existe concordancia con ciertas investigaciones realizadas. Los resultados se ajustan con cierta proximidad a los proporcionados por otros estudios, debiendo tener en cuenta que existen factores distintivos entre los mismos y son determinantes en la obtención de datos. Estos son: los pesos de los usuarios, parámetros antropométricos, instrumentos de medición, etc.

Finalmente, tras analizar las diferencias de un modelo y otro, se puede afirmar mediante el estudio que se ha llevado a cabo que modelo guiado tiene una estabilidad mayor en la ejecución del movimiento que el modelo libre. Además, entre las ventajas de la sentadilla en la máquina Smith frente la sentadilla libre se encuentran las siguientes: los pares obtenidos en las articulaciones son menores, no existe desplazamiento horizontal en el apoyo de la barra, las velocidades y aceleraciones alcanzadas en el movimiento tienen magnitudes de menor rango y el contacto de pie-suelo en el modelo guiado tiene mayor firmeza, obteniendo mayor estabilidad. Todo esto, se traduce en que la máquina Smith es una alternativa ideal para gente que está iniciándose en el fitness o levantamiento de pesas, mientras que la sentadilla con barra libre puede ser usada por usuarios con una mayor experiencia para trabajar el equilibrio y la compensación durante la realización del ejercicio.

6. Bibliografía

- [1] «JERÓNIMO MILO,» [En línea]. Available: <https://jeronimomilo.com.ar/historia-de-las-sentadillas-squats/>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].
- [2] P. A. C. González, «G-SE,» CorpoSao, 14 abril 2014. [En línea]. Available: <https://g-se.com/lo-que-todo-entrenador-debe-saber-y-un-dia-alguien-dijo-las-rodillas-no-pueden-viajar-mas-alla-de-las-puntas-de-los-pies-bp-l57cfb26d77291>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].
- [3] C. Heffernan, «PHYSICAL CULTURE STUDY,» 15 diciembre 2015. [En línea]. Available: <https://physicalculturestudy.com/2015/12/15/the-history-of-the-smith-machine/>. [Último acceso: 04 de julio de 2023].
- [4] S. Lucena, «TITANIUM STRENGHT,» 2 noviembre 2022. [En línea]. Available: <https://www.titaniumstrength.es/blog/guia-de-compra-que-debo-considerar-antes-de-elegir-una-maquina-smith/>. [Último acceso: 07 de julio de 2023].
- [5] F. Delavier, «Mujeres. Guía de los movimientos de musculación - Descripción anatómica.,» 2006. 2ª Edición.. [En línea]. Available: <https://books.google.es/books?id=ncdca1oIVf8C&printsec=frontcover&dq=guia+de+los+movimientos+de+mosculaci%C3%B3n&hl=ca&cd=1#v=onepage&q&f=false>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].
- [6] C. P. Soliveres, «Entrenamientos,» 17 julio 2020. [En línea]. Available: <https://www.entrenamientos.com/ejercicios>. [Último acceso: 15 de abril de 2023].
- [7] J. Colomer, «Sentadillas libres vs Multipower,» HSNBlog, [En línea]. Available: <https://www.hsnstore.com/blog/deportes/fitness/sentadillas-libres-multipower/>. [Último acceso: 21 de marzo de 2023].
- [8] «ANÁLISIS BIOMECÁNICO DE LAS SENTADILLAS,» [En línea]. Available: https://g-se.com/uploads/blog_adjuntos/an_lisis_biomec_nico_de_las_sentadillas.pdf. [Último acceso: 15 de marzo de 2023].

- [9] J. R. Palencia, «Músculo Trapecio: ¿Qué es?, origen, inserción, función, lesiones y más,» *fisico.tv*, [En línea]. Available: <https://fisico.tv/articulos/anatomia/musculos/trapezio/>. [Último acceso: 27 de marzo de 2023].
- [10] P. B. ., F. B. ., F. M. & S. Z. Andrea Biscarini, «Modelling the joint torques and loadings during squatting at the Smith machine,» *Journal of Sports Sciences*, Vols. %1 de %229:5, 457-469, 2011.
- [11] O. Arandjelović, «Common Variants of the Resistance Mechanism in the Smith Machine: Analysis of Mechanical Loading Characteristics and Application to Strength-Oriented and Hypertrophy-Oriented Training,» vol. 26(2), febrero 2012.
- [12] P. E. L. a. A. C. Fry, «The Kansas Squat Test Modality Comparison: Free-Weights vs. Smith Machine,» 2016.
- [13] M. F. E. Abarca, Guía de prácticas de análisis cinemático de mecanismos usando software GEOGEBRA y MATLAB, Chiapas: Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, 2014, p. 134.
- [14] J. D. Abascal, TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS, 1 ed., Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla, 2017, p. 433.
- [15] D. Eric A. Fuller, « Modelo de Centro de Presiones de Fuller,» [En línea]. Available: <https://clifis.com/wp-content/uploads/2019/09/Centro-de-presiones.pdf>. [Último acceso: 25 de septiembre de 2023].
- [16] R. CONTINI, «Body Segment Parameters,» [En línea]. Available: http://www.oandplibrary.org/al/pdf/1972_01_001.pdf. [Último acceso: 16 de febrero de 2023].
- [17] «MedlinePlus,» 6 febrero 2023. [En línea]. Available: <https://medlineplus.gov/ency/article/002346.htm#:~:text=Distal%20is%20the%20opposite%20of,distance%2C%20while%20proximal%20indicates%20proximity>. [Último acceso: 11 de marzo de 2023].
- [18] V. y. G. M. Soto, «PARÁMETROS INERCIALES PARA EL MODELADO BIOMECÁNICO DEL CUERPO HUMANO,» 1996. [En línea]. Available: <file:///C:/Dialnet->

ParametrosInercialesParaElModeladoBiomecanicoDelCu-2278423.pdf. [Último acceso: 17 de septiembre de 2023].

- [19] R. F. E. d. Halterofilia, «Reglas y Regalmentos Técnicos de Competición,» Real Federación Española de Halterofilia, Enero 2020. [En línea]. Available: https://www.fedehalter.org/wp-content/uploads/2020/08/00_Reglamento_T%C3%A9cnico_IWF_2017-2020_Enero_2020.pdf. [Último acceso: 16 de julio de 2023].
- [20] R. L. J. W. L. K. I. A. PAUL A. SWINTON, «A BIOMECHANICAL COMPARISON OF THE TRADITIONAL SQUAT, POWERLIFTING SQUAT, AND BOX SQUAT,» *Journal of Strength and Conditioning Research*, vol. 26(7), nº 1805–1816, 2012.
- [21] M. K. U. M. M. S. M. G. Janez LOGAR, «DIFFERENCES IN THE KNEE TORQUE BETWEEN HIGH- AND LOW-BAR BACK SQUAT TECHNIQUES: A PILOT STUDY,» *ANNALES KINESIOLOGIAE*, p. 10, 2014.
- [22] S. C. C. V. D. a. R. P. Andrea Biscarini, «Joint Torques and Tibiofemoral Joint Reaction Force in the Bodyweight “Wall Squat” Therapeutic Exercise,» *applied sciences*, 2020.
- [23] U. C. d. Navarra, «Hernia discal lumbar,» 2023. [En línea]. Available: <https://www.cun.es/enfermedades-tratamientos/enfermedades/hernia-discal-lumbar>. [Último acceso: 4 de julio de 2023].
- [24] «PureFitness,» [En línea]. Available: <https://www.purefitness.es/jaulas-y-racks#:~:text=Las%20jaulas%20y%20racks%20son,%2C%20press%20de%20pecho%2C%20dominadas%E2%80%A6>. [Último acceso: 08 de julio de 2023].
- [25] J. Villalba, «Men'sHealth,» Men'sHealth, 6 Febrero 2021. [En línea]. Available: <https://www.menshealth.com/es/fitness/a35318662/eugen-sandow-primer-culturista-historia/>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].
- [26] J. D.Feria, «Britannica,» Departamento de historia de Georgia College and State University., [En línea]. Available: <https://www.britannica.com/topic/physical-culture/Contemporary-physical-culture>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].
- [27] «JACKLALANNE,» 2011. [En línea]. Available: <https://jacklalanne.com/>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].

- [28] «CYCLUS 2,» [En línea]. Available: <https://www.cyclus2.com/es/test-anaerobico-wingate.htm>. [Último acceso: 09 de julio de 2023].
- [29] G. d. México, «Teorema de Pitágoras,» Gobierno de México, [En línea]. Available: <https://aprendeencasa.sep.gob.mx/secundaria/teorema-de-pitagoras/#:~:text=Entonces%20este%20teorema%20dice%20que,al%20cuadrado%20de%20la%20hipotenusa%E2%80%9D..> [Último acceso: 27 de marzo de 2023].
- [30] «Teorema del Coseno,» [En línea]. Available: https://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/triangulo/th_coseno.html#:~:text=Teorema%20del%20coseno&text=Teorema.,por%20el%20coseno%20del%20%C3%A1ngulo.. [Último acceso: 21 de marzo de 2023].
- [31] MedlinePlus, «Enciclopedia médica → Distal,» [En línea]. Available: <https://medlineplus.gov/ency/article/002346.htm#:~:text=Distal%20is%20the%20opposite%20of,distance%20C%20while%20proximal%20indicates%20proximity.> [Último acceso: 06 de febrero de 2023].
- [32] MedlinePlus, «Enciclopedia médica → Proximal,» [En línea]. Available: <https://medlineplus.gov/spanish/ency/article/002287.htm#:~:text=Proximal%20significa%20m%C3%A1s%20cerca%20del,es%20lo%20opuesto%20a%20distal..> [Último acceso: 24 de febrero de 2023].
- [33] G. R. S*, «QUE ES BIOMECÁNICA,» [En línea]. Available: http://viref.udea.edu.co/contenido/menu_alterno/apuntes/ac09-intro.pdf. [Último acceso: 13 de julio de 2023].
- [34] J. F. López, «Beneficios de los ejercicios isométricos en el entrenamiento,» 27 agosto 2015. [En línea]. Available: <https://www.zonadepadel.es/blog/2015/08/beneficios-de-los-ejercicios-isometricos-en-el-entrenamiento/#:~:text=La%20fase%20o%20el%20ejercicio,carga%20durante%20un%20tiempo%20establecido.&text=Los%20est%C3%ADmulos%20deben%20variar%20con,nuevas%20adaptacione.> [Último acceso: 21 de agosto de 2023].
- [35] D. F.-L. J. & S. García-Vallejo, «Dynamical analysis and design of active orthoses for spinal cord injured subjects by aesthetic and energetic optimization.,» *Nonlinear Dyn* 84, 559–581, Abril 2016.

- [36] L. Leal, «Fundamentos Cadenas Cinemáticas,» [En línea]. Available: https://www.resistanceinstitute.com/academy/_pdfs_a4uL4s5/fundamentos_cadenas_cinematicas.pdf. [Último acceso: 20 de julio de 2023].

Anejo I. Fases de realización y cronograma

A continuación, en la Tabla 16 se exponen los períodos de realización de este estudio, con las fases del trabajo en los meses donde han sido realizadas. Se puede observar para cada mes las horas dedicadas a cada fase de la planificación.

Tabla 16. Cronograma del estudio.

	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre
Búsqueda de artículos e información diversa	10	8										
Revisión Bibliográfica			5	10	8			10	5			
Estudio del modelo			10	12								
Desarrollo del modelo (Obtención de los ángulos)				12	20							
Desarrollo del modelo (Cinemática y Dinámica)						15	5	8	20	6		
Programación del modelo (Matlab)								5	25	15	20	
Representación del modelo en AutoCAD						8	2	4	5			
Memoria					5	10	5	15	35	18	40	20
Σ	10	8	15	34	33	33	12	42	90	39	60	20

El total de horas empleadas ha sido 406. El cómputo total de horas empleadas en este Trabajo de Fin de Grado suma un número elevado, ya que la realización de la programación de la dinámica y cinemática implicó una constante revisión, es tal así que se ejecutaron diversas modificaciones en el modelo hasta obtener los resultados correctos y adecuados.

Por otra parte, la memoria se estaba realizando a la vez que la programación, lo que cada cambio que se llevaba a cabo en la misma suponía una modificación en la representación de gráficas y fórmulas.

Anejo II. Competencias

En el grado de Ingeniería Mecánica realizado en la Universidad de Almería se han alcanzado unas competencias las cuales se clasifican en básicas, transversales y específicas. Con este Trabajo de Fin de Grado culmina la obtención de competencias de la titulación. De todas las adquiridas en el grado, en este trabajo destacan las siguientes:

- Competencias Básicas:
 - Poseer y comprender conocimientos (CB1). Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.
 - Aplicación de conocimientos (CB2). Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
 - Capacidad de emitir juicios (CB3). Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética.
 - Capacidad de comunicar y aptitud social (CB4). Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado.
- Competencias Transversales:
 - Conocimientos básicos de la profesión (UAL1). Conocimiento, habilidades y actitudes que posibilitan la comprensión de nuevas teorías, interpretaciones, métodos y técnicas dentro de los diferentes campos disciplinares, conducentes a satisfacer de manera óptima las exigencias profesionales.

- Habilidad en el uso de las TIC (UAL2). Utilizar las Técnicas de Información y Comunicación (TICs) como una herramienta para la expresión y la comunicación, para el acceso a fuentes de información, como medio de archivo de datos y documentos, para tareas de presentación, para el aprendizaje, la investigación y el trabajo cooperativo.
- Capacidad para aprender a trabajar de forma autónoma (UAL9). Capacidad para diseñar, gestionar y ejecutar una tarea de forma personal.
- Competencias Específicas:
 - (CRI7). Conocimiento de los principios de teoría de máquinas y mecanismos.
 - (CRI8). Conocimiento y utilización de los principios de la resistencia de materiales.

© Eric Castillo Sanguino, 2025

© Palmito Books, S.L., 2025
Calle Pedro García Villalba, 79, 2ºC
30150 La Alberca, Murcia
ESPAÑA

En el mundo del fitness, la sentadilla es un ejercicio básico y, por consiguiente, uno de los más practicados. Existen muchas variantes de la sentadilla, pero las dos más habituales que se realizan en gimnasios son la sentadilla libre y la guiada en máquina Smith. En este estudio realizado como Trabajo de Fin de Grado, se ha evaluado una comparativa biomecánica entre las dos variantes de sentadilla. Para ello, se ha definido un modelo matemático que describe el ejercicio de la sentadilla, donde posteriormente ha sido utilizado para resolver el problema de posición, cinemático y dinámico de cada ejercicio de forma independiente. En la modelización del ejercicio se ha trabajado desde un punto de vista mecánico, estudiando el cuerpo como un mecanismo de tres eslabones articulados. Los estudios han sido realizados a partir de los registros de posición, velocidad, aceleración y fuerzas de reacción medidas en una plataforma de fuerza. En los resultados se ha obtenido y analizado la cinemática completa y las fuerzas internas en las articulaciones, que, posteriormente, se ha realizado una comparativa entre las dos variantes del ejercicio de sentadilla estudiadas.

